Komplexe Zahlen

Die Erweiterung des Zahlenbereichs der reelen Zahlen auf die komplexen Zahlen ermöglicht die Lösung einer Gleichung der Form

$$x^2 = -1$$

durch Definition der imaginären Einheit j mit der Eigenschaft

$$\mathrm{j}^2 = -1$$

(In der Elektrotechnik wird statt i der Buchstabe j verwendet, um Verwechslungen mit dem Strom i vorzubeugen)

Eine komplexe Zahl m läßt sich darstellen als

$$\underline{m} = a + \mathrm{j}\, b$$

a, b sind reelle Zahlen

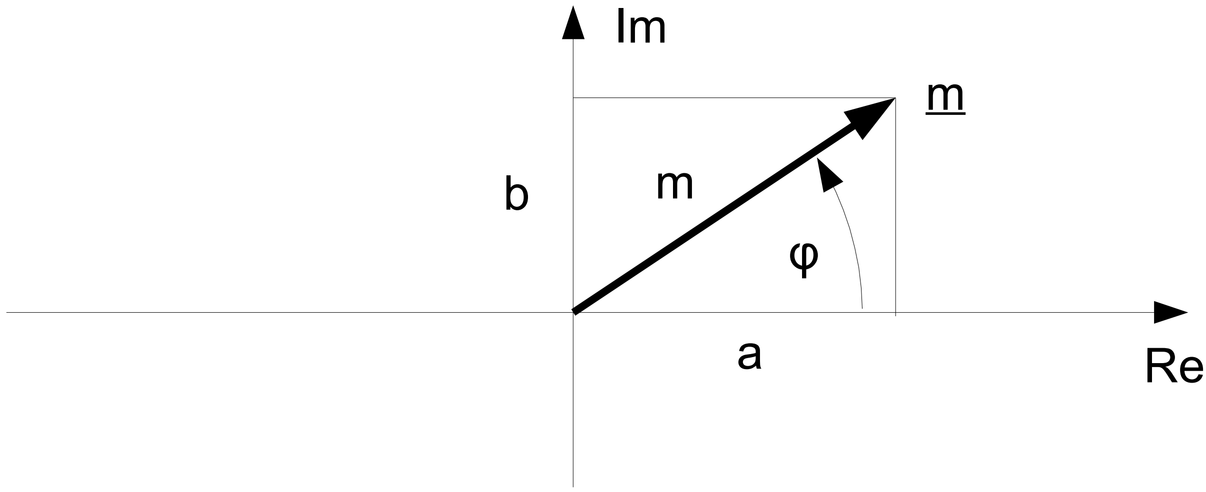
a ist der Realteil der Zahl m $\qquad a = \Re\{\underline{m}\}$

b ist der Imaginärteil der Zahl m $\qquad b = \Im\{\underline{m}\}$

Es gelten die Rechenregeln der Algebra, unter Berücksichtigung von $\mathrm{j}^2 = -1$.

Komplexe Zahlenebene

Wenn die reellen Zahlen noch auf einer Zahlengeraden angegeben werden konnten, so lassen sich die komplexen Zahlen in der **komplexen Zahlenebene** einzeichnen.



Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende gleichwertige Darstellungsformen einer komplexen Zahl:

$\underline{m} = a + \mathrm{j}\,b$ Normalform

$\underline{m} = m \cdot (\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ trigonometrische Form

$\underline{m} = m \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$ Exponentialform

mit $m = |\underline{m}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag von m und

$\varphi = \arctan\dfrac{b}{a}$ Winkel oder Argument von m

Die Exponentialform basiert auf der Euler'schen Formel:

$$e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$$

Real- und Imaginärteil a bzw. b lassen sich aus m und φ berechnen:

$$a = m \cdot \cos\varphi \qquad b = m \cdot \sin\varphi$$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Für die **Addition** und **Subtraktion** von komplexen Zahlen bietet sich die Normalform an:

$$\underline{m}_1+\underline{m}_2=a_1+\mathrm{j}\,b_1+a_2+\mathrm{j}\,b_2=(a_1+a_2)+\mathrm{j}\,(b_1+b_2)$$

$$\underline{m}_1-\underline{m}_2=a_1+\mathrm{j}\,b_1-(a_2+\mathrm{j}\,b_2)=(a_1-a_2)+\mathrm{j}(b_1-b_2)$$

Es werden die Realteile und die Imaginärteile getrennt addiert bzw. subtrahiert. In der komplexen Zahlenebene entspricht dies einer „vektoriellen“ Addition bzw. Subtraktion der Zeiger $\underline{m}_1$ und m_2.

Für die **Multiplikation** und **Division** ist die Exponentialform günstiger.

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_2=m_1\cdot e^{\mathrm{j}\,\varphi_1}\cdot m_2\cdot e^{\mathrm{j}\,\varphi_2}=m_1\cdot m_2\cdot e^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{\underline{m}_1}{\underline{m}_2}=\frac{m_1\cdot e^{\mathrm{j}\,\varphi_1}}{m_2\cdot e^{\mathrm{j}\,\varphi_2}}=\frac{m_1}{m_2}\cdot e^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Es werden die Beträge multipliziert bzw. dividiert, während die Winkel addiert bzw. subtrahiert werden.
In der komplexen Zahlenebene entspricht dies neben der Änderung des Betrages einer Drehung des Zeigers.

konjugiert komplexe Erweiterung

Wenn m eine komplexe Zahl ist, so nennt man die Zahl m* die zu m **konjugiert komplexe Zahl**

$$\underline{m}=a+\mathrm{j}\,b \qquad \underline{m}^*=a-\mathrm{j}\,b$$

Multipliziert man eine komplexe Zahl mit ihrer konjugiert komplexen, so wird der Imaginärteil null und man erhält eine reelle Zahl:

$$\underline{m}\cdot\underline{m}^*=(a+\mathrm{j}\,b)\cdot(a-\mathrm{j}\,b)=a^2-\mathrm{j}\,ab+\mathrm{j}\,ab-\mathrm{j}^2b^2=a^2+b^2$$

Diese Eigenschaft nutzt man, um den Nenner von Brüchen reell zu machen. Der Bruch wird mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert.

$$\underline{m}=\frac{\underline{z}}{a+\mathrm{j}\,b}=\frac{\underline{z}\cdot(a-\mathrm{j}\,b)}{(a+\mathrm{j}\,b)\cdot(a-\mathrm{j}\,b)}=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot(\underline{z}\cdot(a-\mathrm{j}\,b))$$