Historischer Überblick

Die erste uns bekannte Beschreibung der Elektrizität stammt aus Griechenland und zwar vom Naturphilosophen **Thales von Milet** (600 v. Chr.).

1600	**William Gilbert** prägt den Begriff „Elektrizität“ (griech. Elektron = Bernstein)
1780	**Luigi Galvani** entdeckt zufällig die Kontraktion von Muskeln unter dem Einfluss von Elektrizität.
1785	**Charles Augustin de Coulomb** beschreibt die Kräfte zwischen elektrischen Ladungen
um 1800	**Alessandro Graf Volta** baut die erste "Batterie"
1819	**Hans Christian Oerstedt** beobachtet die Ablenkung einer Kompassnadel durch den elektrischen Strom => Elektromagnetismus
1826	**André Marie Ampère** veröffentlicht die "Theorie der elektro-dynamischen Erscheinungen"
1821	**Georg Simon Ohm** entdeckt das nach ihm benannte Ohmsche Gesetz
1831	**Michael Faraday** entdeckt die elektromagnetische Induktion
um 1845	**Gustav Robert Kirchhoff** leitet aus dem Ohmschen Gesetz allgemeine Regeln für die Strom- und Spannungsverteilung in Stromkreisen ab (Kirchhoffsche Gesetze).
1860	**Philipp Reis** erfindet am Institut Garnier in Friedrichsdorf das erste Telefon.
1864	**James Clerk Maxwell** veröffentlicht die nach ihm benannten Maxwellschen Gleichungen, eine umfassende Beschreibung elektrischer und magnetischer Felder.
1866	**Werner von Siemens** entdeckt das dynamoelektrische Prinzip, die Grundlage der elektrischen Maschinen.
1880	**John Dixon Gibbs** und **Lucien Gaulard** stellen den ersten Transformator vor.
1882	**Thomas Alva Edison** nimmt das erste öffentliche Kraftwerk zur Stromerzeugung in Betrieb (Gleichstromnetz).
1883	erster eigenständiger Studiengang Elektrotechnik (an der TH Darmstadt, **Erasmus Kittler** wird erster Professor in diesem Fach)
1886	**Heinrich Hertz** gelingt die erste Übertragung einer elektromagnetischen Welle.
	George Westinghouse nimmt ein öffentliches Wechselstromnetz in Betrieb.
1904	Entwicklung der Elektronenröhre durch den englischen Physiker **John Ambrose Fleming**.
1947	Erfindung des Transistors durch William **B. Shockley**, **John Bardeen** und **Walter Brattain** in den Bell Laboratories
1958	**Jack Kilby** bei Texas Instruments baut den ersten integrierten Schaltkreis (IC).

Aufgabengebiete der Elektrotechnik

- Energietechnik
- Antriebstechnik
- Nachrichten- und Informationstechnik
- Elektronik und Mikroelektronik
- Automatisierungstechnik
- Theoretische Elektrotechnik

Physikalische Größen

Eine physikalische Größe ist eine messbare Eigenschaft eines physikalischen Objektes und dient dazu, jene Eigenschaft quantitativ zu beschreiben.

Eine physikalische Größe wird durch ihre Maßzahl und ihre Einheit beschrieben.

Physikalische Größe = Maßzahl · Einheit

Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen werden durch **Größengleichungen** beschrieben.

Beispiel: $$v = \frac{x}{t}$$

Bei **Zahlenwertgleichungen** dagegen werden nur die Maßzahlen verknüpft. Diese Gleichungen stimmen nur, wenn die Größen in einer vorgegebenen Einheit eingesetzt werden. Zahlenwertgleichungen sollten nicht mehr verwendet werden.

Als Kompromiß zwischen den nicht eindeutigen Zahlenwertgleichungen und der korrekten Größengleichung gibt es **zugeschnittene Größengleichungen**.

Beispiel für eine zugeschnittene Größengleichung: $$\frac{v}{\mathrm{km/h}} = \frac{\frac{x}{\mathrm{m}}}{\frac{t}{\mathrm{s}}} \cdot 3.6$$

Einheitensysteme

Die verschiedenen physikalischen Größen sind untereinander über Größengleichungen verknüpft.

Grundgrößen lassen sich nicht durch andere Größen berechnen.

Die Wahl der Grundgrößen ist willkürlich und historisch gewachsen.

Die Einheiten der Grundgrößen sind die Basiseinheiten.

Je nach Wahl der Grundgrößen gibt es verschiedene Einheitensysteme.

Im **internationalen Einheitensystem (SI)** sind die Grundgrößen (und damit die Basiseinheiten) wie folgt definiert:

Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_V	Candela	cd

Alle physikalischen Größen lassen sich aus diesen Grundgrößen berechnen. Dadurch lassen sich auch die Einheiten der physikalischen Größen als Verknüpfungen der Basiseinheiten darstellen.

SI-Einheiten sind alle Einheiten, welche sich durch Potenzprodukte von SI-Basiseinheiten ohne einen von eins verschiedenen Zahlenfaktor darstellen lassen.

Präfixe zu Einheiten

Aus praktischen Gründen gibt es Vorsilben zu den Einheiten, mit denen Faktoren der Form 10^x zur Einheit hinzugefügt werden können.
Diese Präfixe sind:

Kürzel	Name	Wert		
Y	Yotta	$(10^3)^8 = 10^{24}$	1 000 000 000 000 000 000 000 000	Quadrillion
Z	Zetta	$(10^3)^7 = 10^{21}$	1 000 000 000 000 000 000 000	Trilliarde
E	Exa	$(10^3)^6 = 10^{18}$	1 000 000 000 000 000 000	Trillion
P	Peta	$(10^3)^5 = 10^{15}$	1 000 000 000 000 000	Billiarde
T	Tera	$(10^3)^4 = 10^{12}$	1 000 000 000 000	Billion
G	Giga	$(10^3)^3 = 10^9$	1 000 000 000	Milliarde
M	Mega	$(10^3)^2 = 10^6$	1 000 000	Million
k	Kilo	10^3	1 000	Tausend
h	Hekto	10^2	100	Einhundert
da	Deka	10^1	10	Zehn
–	Einheit	10^0	1	Eins
d	Dezi	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	Zenti	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	Milli	10^{-3}	0,001	Tausendstel
µ	Mikro	$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$	0,000 001	Millionstel
n	Nano	$(10^{-3})^3 = 10^{-9}$	0,000 000 001	Milliardstel
p	Piko	$(10^{-3})^4 = 10^{-12}$	0,000 000 000 001	Billionstel
f	Femto	$(10^{-3})^5 = 10^{-15}$	0,000 000 000 000 001	Billiardstel
a	Atto	$(10^{-3})^6 = 10^{-18}$	0,000 000 000 000 000 001	Trillionstel
z	Zepto	$(10^{-3})^7 = 10^{-21}$	0,000 000 000 000 000 000 001	Trilliardstel
y	Yokto	$(10^{-3})^8 = 10^{-24}$	0,000 000 000 000 000 000 000 001	Quadrillionstel

Dimension einer physikalischen Größe

Nicht zu Verwechseln mit der Einheit ist die **Dimension** einer physikalischen Größe.

Läßt man bei einer physikalischen Größe die Maßzahl außer acht und betrachtet nur die Verknüpfung der Grundgrößen, so erhält man die Dimension.

Beispiel:

$l_1 = 3\ \mathrm{m}$ und
$l_2 = 20\ \mathrm{cm}$
sind verschiedene Größen mit verschiedenen Einheiten. Beide haben jedoch die Dimension einer Länge.

Nutzung des elektrischen Stromes

Wir nutzen den elektrischen Strom auf vielfältige Weise:

- Wärme
- Licht
- Magnetfeld
- chemische Wirkungen
- Träger von Information

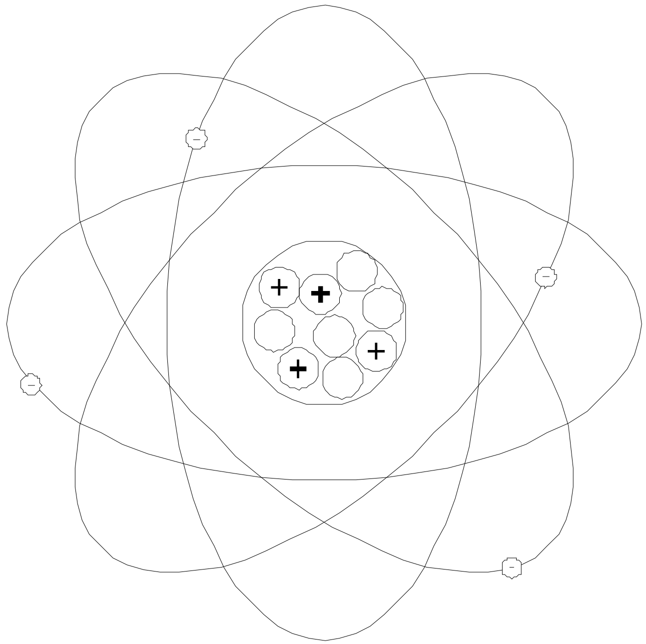
Aber, was ist eigentlich elektrischer Strom?

Elektrische Ladung

- Ladung ist eine Eigenschaft der Materie.
- Das Formelzeichen für die Ladung ist üblicherweise Q.
- Ladung tritt in zwei komplementären Formen auf, die willkürlich positiv und negativ genannt wurden.
- Zwischen den Ladungen wirken Kräfte. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, unterschiedliche ziehen sich an.
- Die beiden Formen können sich in ihrer Wirkung nach außen hin aufheben.
- Ladungsträger sind Protonen und Elektronen, aber auch Positronen, Mesonen und Quarks.
- Die kleinste frei vorkommende Ladungseinheit, die Elementarladung, entspricht der eines Elektrons bzw. Protons.
- Elektronen, Protonen und die elektrisch neutralen Neutronen bilden die Grundbausteine der Materie.

Das Bohr'sche Atommodell

Im Bohr'schen Atommodell, welches für die Erklärung des elektrischen Stromes ausreicht, besteht der Atomkern aus Neutronen und Protonen und trägt daher eine positive Ladung. Um den Kern kreisen die negativ geladenen Elektronen. Nach außen heben sich die Ladungen der Protonen und Elektronen auf und das Atom ist elektrisch neutral.



Unter bestimmten Umständen lassen sich die Ladungen trennen und die Materie erscheint nach außen elektrisch geladen.

Der elektrische Strom

Als elektrischen Strom bezeichnet man die gerichtete Bewegung von Ladungen.

Beispiele für eine solche gerichtete Bewegung von Ladungsträgern:

Leitungsmechanismus	**Beispiele**
frei bewegliche Elektronen	Metalle bei Zimmertemperatur
Ausbreitung von Ladungsträgern im Vakuum	Austritt von Elektronen aus Metallen Plasmaströmungen kosmische Strahlung Radioaktivität
Bewegung gelöster Ionen in Flüssigkeiten und Schmelzen	elektrolytische Dissoziation hydratisierte Ionen
Supraleitung	Festkörper mit bestimmter Gitterstruktur unterhalb einer bestimmten Temperatur
Ionisation in Gasen	Gasentladung (z.B. durch Anlegen einer hohen Spannung, Leuchtstoffröhre)
Störstellen-‚Transport'	n- oder p-dotierte Halbleiter

Die **Stromstärke** entspricht der Ladungsmenge, welche pro Zeiteinheit in einem Leiter transportiert wird.

I : Stromstärke
Q : Ladungsmenge
t : Zeit

$$I = \frac{Q}{t} \qquad [I] = \mathrm{A} \quad \text{(Ampère)}$$

Die Elementarladung

Löst man die Definitionsgleichung der Stromstärke nach *Q* auf, ergibt sich:

$$Q = I \cdot t$$

Über diesen Zusammenhang ist die Einheit der elektrischen Ladung mit den SI Basiseinheiten Ampère und Sekunde verknüpft. Die Einheit für die Ladung ist also die Ampèresekunde oder auch das Coulomb, benannt nach dem französischen Physiker Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806).

$$[Q] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{C}$$ (Coulomb)

Nun können wir die bereits genannte Elementarladung *e* beziffern:

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Die Ladung eines Protons ist $+e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

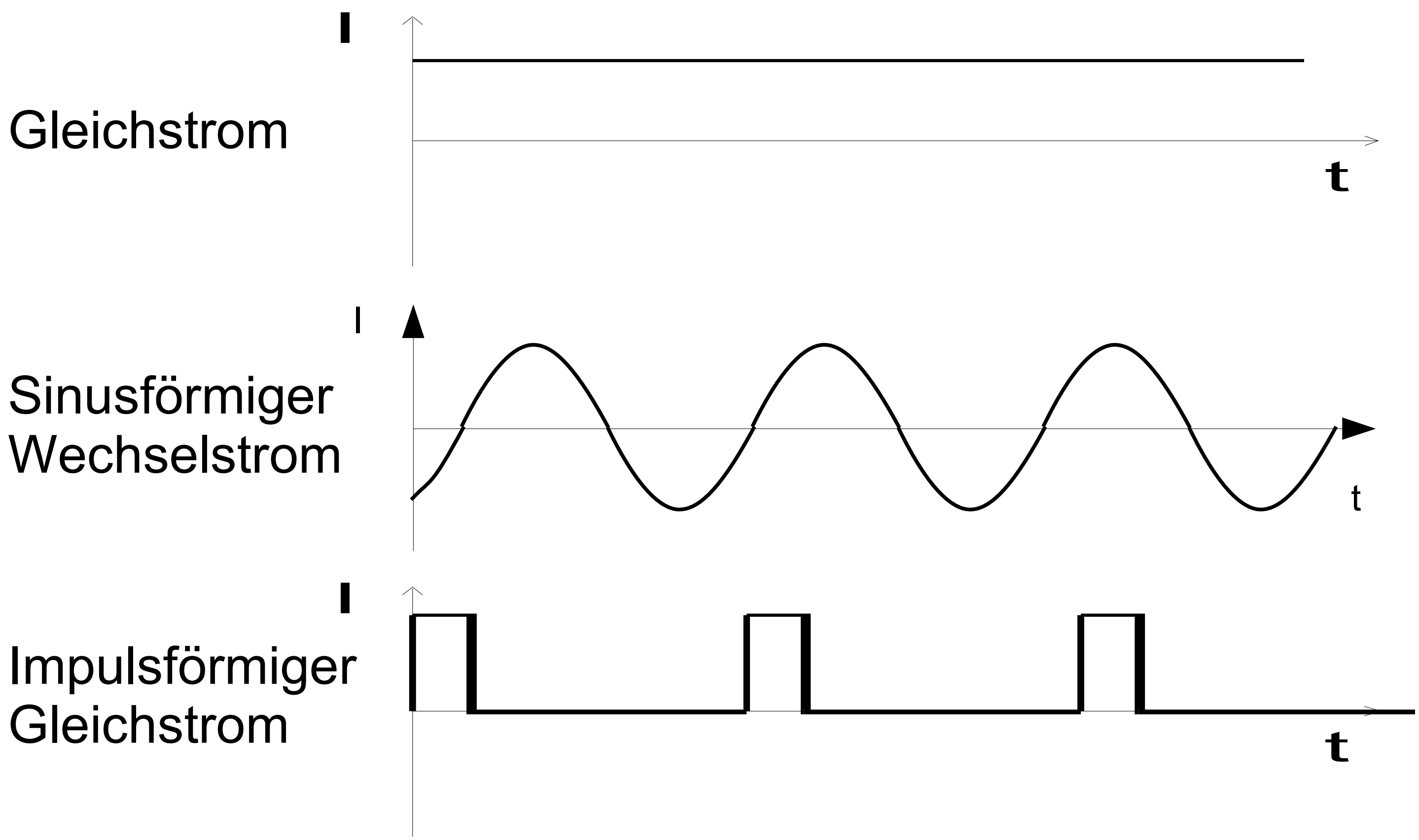
Die Ladung eines Elektrons ist $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

Allgemeine Definition der Stromstärke

Die genannte Definition der Stromstärke gilt in dieser Form nur bei zeitlich unveränderlichen Strömungsverhältnissen.
Im allgemeinen Fall ist die Stromstärke eine Funktion der Zeit und es gilt:

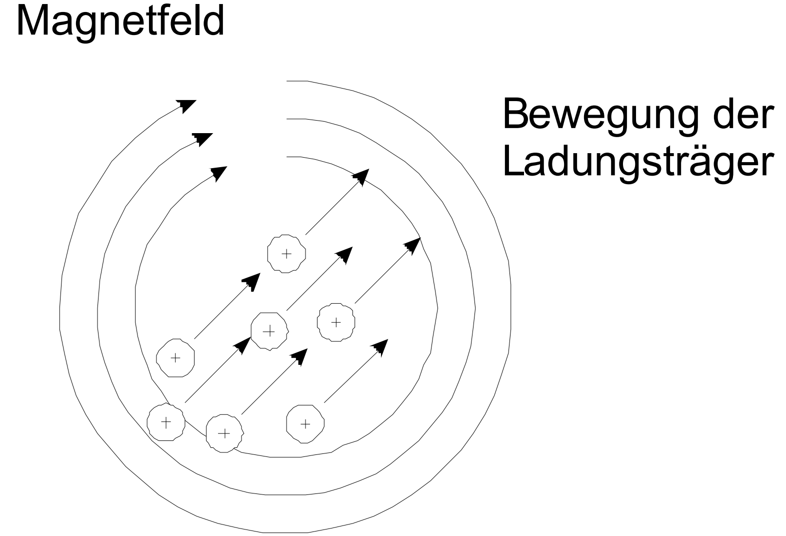
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

Beispiele für den zeitlichen Verlauf von Strömen:



Wirkungen des elektrischen Stroms

- Jede bewegte Ladung wird von einem **Magnetfeld** umgeben.
  Fließt ein elektrischer Strom, so addieren sich die einzelnen Magnetfelder. Ein stromdurchflossener Leiter ist also von einem konzentrischen Magnetfeld umgeben.



- Die bewegten Ladungsträger stoßen an die Atome der Materie. Dadurch wird **Wärme** erzeugt.

- Beim Stromfluß durch leitfähige Flüssigkeiten laufen **chemische Reaktionen** ab.
  Schmelzen und Lösungen z.B. können durch elektrischen Strom zersetzt werden.

Die Stromdichte

Die Stromdichte ist eine vektorielle Größe.

- Der Stromdichtevektor zeigt in Richtung der mittleren Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger.
- Der Betrag der Stromdichte in einem Punkt ist der Strom pro Flächeneinheit.

J : Stromdichte
I : Stromstärke
A : Flächeninhalt der durchströmten Fläche

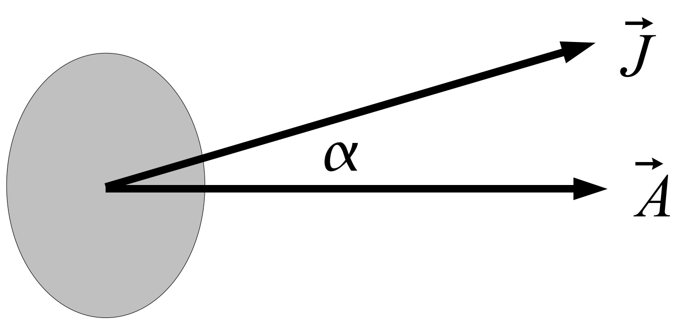
$$\left|\vec{J}\right| = \frac{I}{A}$$

Für die Einheit der Stromdichte gilt:

$$[J] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

In vektorieller Schreibweise läßt sich dieser Zusammenhang mit dem **Skalarprodukt** angeben:

$$I = \vec{J} \circ \vec{A} = \left|\vec{J}\right| \cdot \left|\vec{A}\right| \cdot \cos\alpha$$



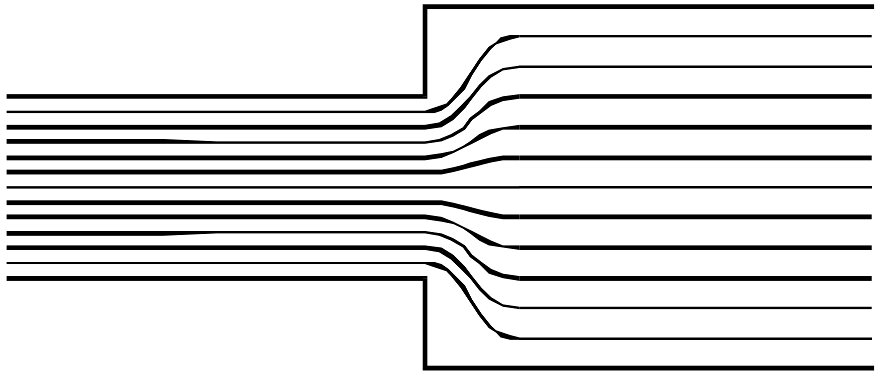
Das Strömungsfeld

Die Stromdichte ist ein **Vektorfeld** und kann mit Feldlinien anschaulich gemacht werden (Strömungslinien, Stromfäden).

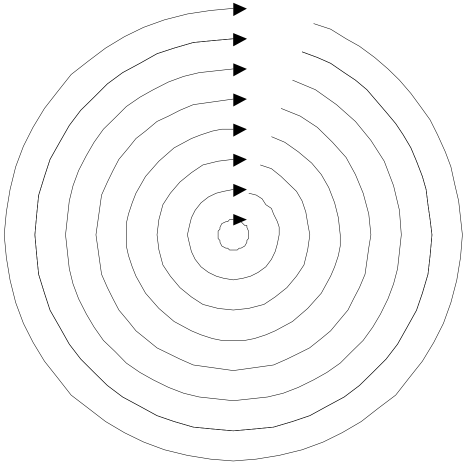
Beispiele:

Leiter mit konstantem Querschnitt

Leiter mit unterschiedlichem Querschnitt



„Wirbelstrom“ in einer Scheibe



Das elektrische Feld

Kraft zwischen Ladungen

Ladungen führen eine gerichtete Bewegung aus, wenn eine Kraft auf sie wirkt.

Ladungen ziehen sich gegenseitig an bzw. stoßen sich ab.

Die Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen im Vakuum errechnet sich nach dem Coulomb'schen Gesetz:

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

F	:	(abstoßende) Kraft zwischen den Ladungen
Q_1, Q_2	:	die beiden beteiligten Ladungsmengen
r	:	Abstand zwischen den Ladungen
ε_0	:	Dielektrizitätskonstante des Vakuums (eine Naturkonstante)

Die elektrische Feldstärke

Man beschreibt die Kraftwirkung einer Ladung auf eine andere Ladung mit dem Begriff des elektrischen Feldes. Jede elektrische Ladung wird von einem solchen elektrischen Feld umgeben und wirkt damit auf andere Ladungen.

Die elektrische Feldstärke an einem beliebigen Punkt des Raumes wird über die Kraftwirkung auf eine Probeladung definiert:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$\vec{E}$: elektrische Feldstärke (Vektor)
$\vec{F}$: Kraft auf die Probeladung (Vektor)
q : Probeladung

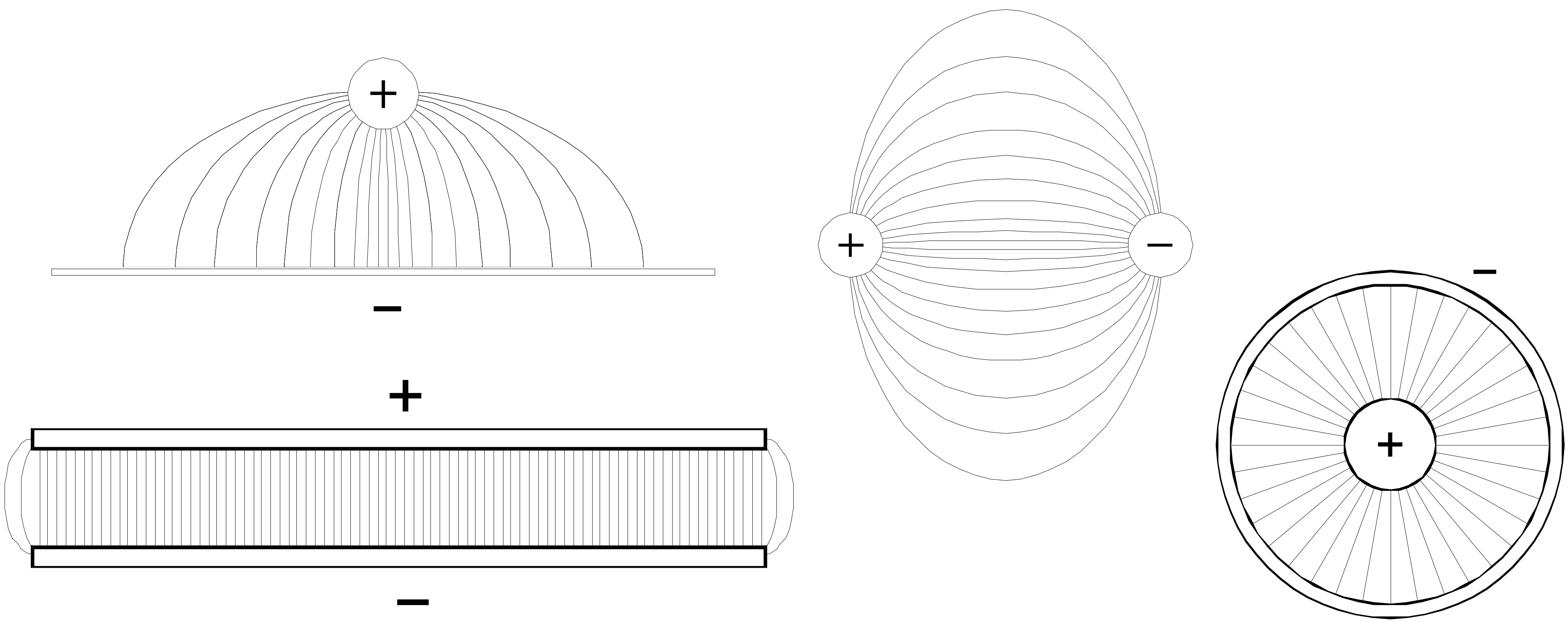
Da die elektrische Feldstärke ein Vektor ist, bezeichnet man das elektrische Feld auch als **Vektorfeld**.

Feldlinien

Felder können durch Feldlinien dargestellt werden.

- Elektrische Feldlinien beginnen an positiven Ladungen und enden an negativen Ladungen.
- Sie verlaufen in Richtung der Kraft auf eine positive Probeladung.
- Sie kreuzen sich nicht.
- Aus Metalloberflächen treten sie senkrecht aus.

Beispiele:



Das elektrische Potential

Die Arbeit, die nötig ist, um eine Ladung Q in einem elektrischen Feld von der Position a zur Position b zu verschieben, errechnet sich über das Integral entlang des Verschiebewegs:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F}\,\vec{dx} = \int_a^b \vec{E} \cdot Q\,\vec{dx} = Q \cdot \int_a^b \vec{E}\,\vec{dx}$$

Statische elektrische Felder sind wirbelfrei, d.h. der Verschiebeweg spielt keine Rolle für das Ergebnis des Integrals. Maßgeblich sind nur der Anfangs- und Endpunkt.

Ein solches Vektor-Feld läßt sich durch ein skalares Feld ersetzen, welches jedem Punkt des Raumes die Energie einer dort befindlichen Ladung zuordnet.

Um von der Größe der Ladung unabhängig zu sein, bezieht man diese Energie auf die Ladungsmenge.

Die resultierende skalare, ortsabhängige Größe bezeichnet man als Potential φ. Man hat vereinbart, dass das Potential in der Nähe zu positiven Ladungen hin zunimmt.

Es gilt:

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \int_a^b \vec{E}\,\vec{dx}$$

Die elektrische Spannung

Die Differenz zweier Potentiale heißt elektrische Spannung.
Das Formelzeichen der Spannung ist *U* (im englischen Sprachraum auch *V*).

$$U = \frac{W}{Q}$$

U : elektrische Spannung
W : Energie bzw. Arbeit, die verrichtet wurde
Q : Ladungsmenge

Die Einheit der Spannung (und des Potentials) ist das Volt (nach Alessandro Graf Volta).

$$[U] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{A \cdot s}} = \mathrm{V} \qquad \text{(Volt)}$$

- Die Angabe einer Spannung bezieht sich immer auf zwei Punkte.
- Um dauerhaft zwischen zwei Anschlussklemmen eine Spannung zu erhalten, auch wenn Ladungen in einem elektrischen Strom abfließen, muss kontinuierlich eine Ladungstrennung vorgenommen werden, also Arbeit verrichtet werden.
- Spannungsquellen sind also Energieumwandler.

Leistung

Leistung ist in der Physik der Quotient aus Arbeit und Zeit.
Das Formelzeichen ist *P*.

$$P = \frac{W}{t}$$

P : Leistung
W : Arbeit, die verrichtet wird
t : Zeit, die dazu nötig ist

Die Einheit der Leistung ist das Watt (nach James Watt).

$$[P] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W} \qquad \text{(Watt)}$$

Die elektrische Leistung

Wenn aufgrund einer Spannung *U* ein Strom *I* fließt, so wird die in den Ladungsträgern gespeicherte Energie frei. Diese frei werdende Energie kann z.B. in mechanische Arbeit, Licht-, Strahlungs- oder Wärmeenergie umgewandelt werden.

Berechnet man die beteiligte Ladung jeweils aus der Definition der Spannung *U* und des Stromes *I*, so ergibt sich:

Spannung: $U = \frac{W}{Q}$ => $Q = \frac{W}{U}$

Strom: $I = \frac{Q}{t}$ => $Q = I \cdot t$

Durch Gleichsetzen der Ladung Q ergibt sich: $\frac{W}{U} = I \cdot t$ oder $\frac{W}{t} = U \cdot I$

Die elektrische Leistung ergibt sich also aus dem Produkt aus Spannung und Stromstärke:

$$P = U \cdot I$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich das Produkt aus Volt und Ampère als weitere Einheit für die Leistung:

$$[P] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{V \cdot A} = \mathrm{W}$$

Die elektrische Arbeit

In der Elektrotechnik ist die Leistung einfach als Produkt aus Spannung und Stromstärke zu berechnen.

Der Zeitbezug der Leistung steckt bereits in der Zeitabhängigkeit der Stromstärke.

Um auf die Arbeit zu kommen muss man die Leistung wieder mit der Zeit multiplizieren.

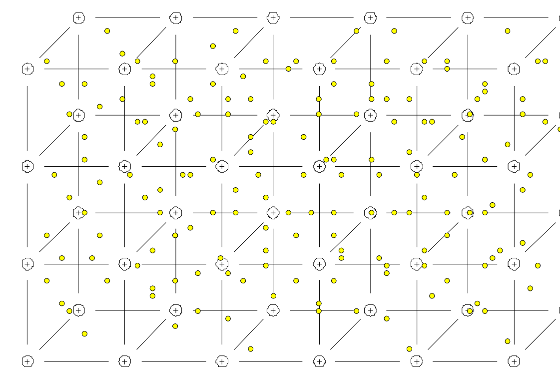
$$W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$$

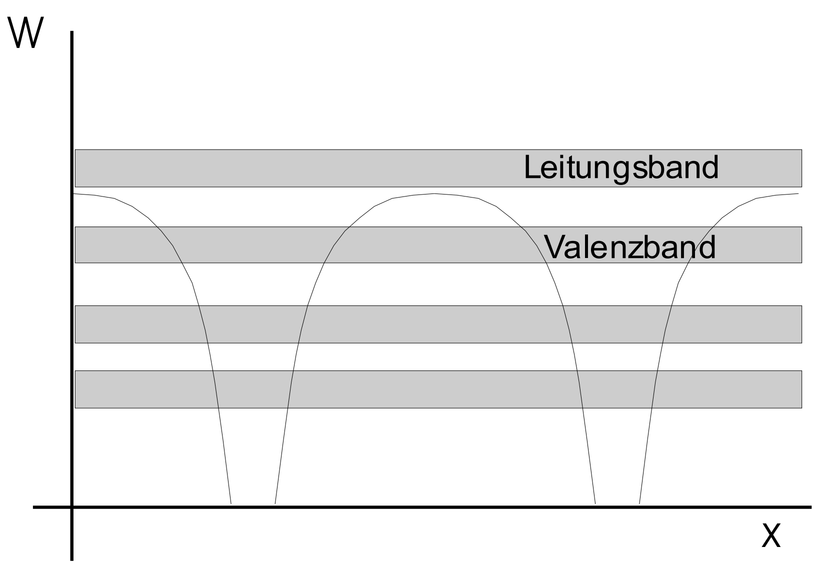
Als Einheiten für die Arbeit gibt es daher insbesondere in der Elektrotechnik die Wattsekunde (1 Ws = 1 J) oder auch die Kilowattstunde (kWh).

Stromleitung in Festkörpern

Das Bändermodell

- In Festkörpern sind die für die Stromleitung verantwortlichen beweglichen Ladungsträger die Elektronen.
- Die Atomkerne bilden ein festes Kristallgitter.





- Die Elektronen haben je nach „Nähe“ zum Atomkern unterschiedliche Energieniveaus, auch Bänder genannt.
- Das höchste Energieniveau eines Atoms heißt **Valenzband**.
- Darüber gibt es das **Leitungsband**, welches der Energie entspricht, die zum Verlassen des Einzugsbereichs eines Atoms nötig ist.
- Elektronen können durch Energiezufuhr vom Valenz- ins Leitungsband wechseln.

Leiter, Nichtleiter, Halbleiter

Die Fähigkeit eines Festkörpers, elektrischen Strom zu leiten, hängt von der Anzahl der Elektronen im Valenzband und der Energiedifferenz zum Leitungsband ab.

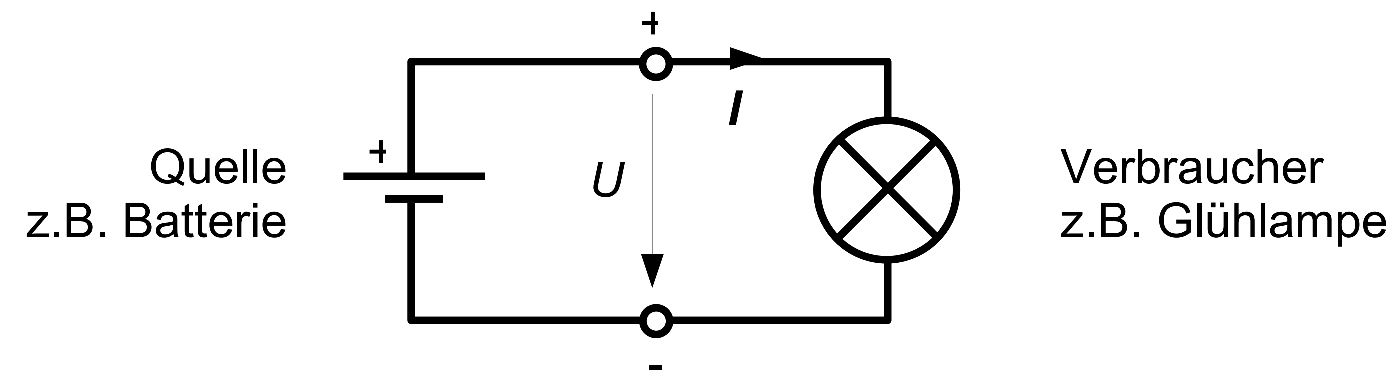
- **Leiter** (Metalle):
  Das Valenzband ist nicht vollständig gefüllt. Das Leitungsband liegt nahe am Valenzband oder überlappt sich mit diesem. Es gibt viele frei bewegliche Elektronen zwischen den Atomkernen (=> „Elektronengas").
  Beispiel:
  Kupfer: $n_{Cu} \approx 8{,}47 \cdot 10^{22}\, Elektronen / cm^3$
  Silber: $n_{Ag} \approx 5{,}87 \cdot 10^{22}\, Elektronen / cm^3$

- **Nichtleiter**
  Das Valenzband ist voll besetzt. Der Abstand zum Leitungsband ist so hoch, dass er mit thermischer Energie nicht überbrückt werden kann. Nur eine sehr hohe elektrische Feldstärke kann einen Ladungstransport bewirken.

- **Halbleiter**
  Ähnlich dem Nichtleiter, jedoch ist der Abstand des Leitungsbandes zum Valenzband nicht so hoch. Es ist möglich, dass Elektronen ins Leitungsband wechseln und im Valenzband Lücken zurücklassen. Sowohl die Elektronen als auch die Fehlstellen tragen zum Ladungstransport bei.

Der Aufbau eines Stromkreises

Ein einfacher Stromkreis besteht aus einer Quelle und einem Verbraucher.

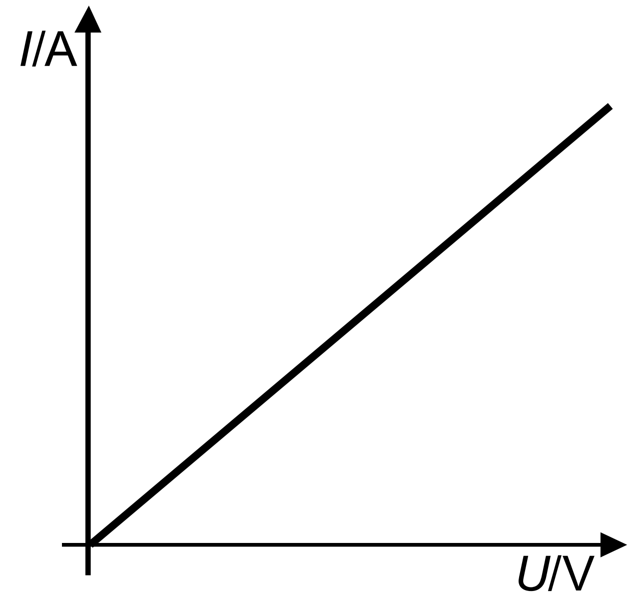


- Zwischen den Anschlussklemmen der Quelle liegt die Spannung *U* und wird durch kontinuierliche Energieumwandlung aufrecht erhalten.
- Der Strom *I* entspricht der Fließrichtung von positiven Ladungsträgern, also im Verbraucher von der positiven Klemme (Anode) zur negativen Klemme (Kathode).
- In der Quelle fließt der Strom vom Minuspol zum Pluspol.
- Diese sog. technische Stromrichtung gilt auch, wenn der Strom von negativen Ladungsträgern gebildet wird (Elektronen). Die technische Stromrichtung ist also der Fließrichtung der Elektronen entgegengerichtet.
- Strom und Spannung werden durch Zählpfeile symbolisiert. Die Zählpfeile geben die Richtung an, in der die jeweilige Größe positiv gezählt wird.
- Die Stromstärke ist an allen Stellen des Stromkreises gleich groß.

Der elektrische Widerstand

- Eine Spannung an den Enden eines Leiters oder Verbrauchers versetzt die Ladungsträger in Bewegung und erzeugt einen elektrischen Strom.
- Die Spannung wird von der Quelle aufrecht erhalten, indem sie kontinuierlich Energie umwandelt.
- Die Anzahl der freien Ladungsträger im Leiter ist begrenzt und ihre Beweglichkeit wird z.B. durch Stöße an den Atomrümpfen gehemmt. Dadurch kann der Stromfluß nicht unbegrenzt ansteigen und es stellt sich ein Gleichgewicht ein.

Der resultierende Strom kann in einer Kennlinie über der angelegten Spannung angetragen werden. Für viele technische Stromleiter, insbesondere für Metalle, gilt ein linearer Zusammenhang:



Strom und Spannung sind dann proportional zueinander.

Das Ohm'sche Gesetz

Die Proportionalität von Spannung *U* und Strom *I* führt zur Definition des elektrischen Widerstandes über das Ohm'sche Gesetz (benannt nach Georg Simon Ohm). Es gilt:

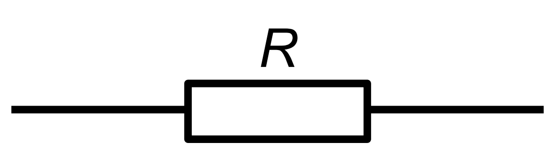
$$\frac{U}{I} = R \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{U}{R} \quad \text{oder} \quad U = R \cdot I$$

Als Proportionalitätskonstante wurde der elektrische Widerstand *R* eingeführt.
Die Einheit des elektrischen Widerstandes ist demnach:

$$[R] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega \qquad \text{Ohm}$$

Der Begriff Widerstand bezeichnet einerseits eine **physikalische Größe**, nämlich die Eigenschaft eines Körpers, die Bewegung der Ladungsträger zu hemmen.

Andererseits wird auch das elektrische **Bauteil** so bezeichnet. In Schaltplänen zeichnet man das Bauteil „Widerstand“ als Rechteck mit Anschlußleitungen:



Der Leitwert

Der Kehrwert des elektrischen Widerstandes wird Leitwert genannt.

Im Gegensatz zum Widerstand ist der Leitwert ausschließlich eine physikalische Größe. Ein Bauteil namens "Leitwert" gibt es nicht.

Der Leitwert wird mit dem Formelzeichen *G* abgekürzt.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$$

Die Einheit des Leitwerts ist:

$$[G] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \frac{1}{\Omega} = \mathrm{S}$$

Siemens
(nach Werner von Siemens)

Widerstand

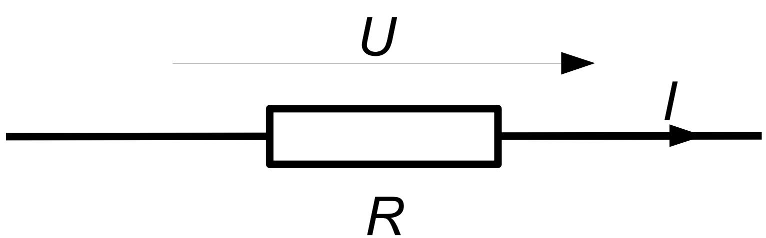
Eine elektrische Spannung verursacht an einem Widerstand einen elektrischen Strom.

Man kann diesen Sachverhalt auch anders betrachten:

Fließt durch einen Widerstand ein elektrischer Strom, so muß zwischen den Anschlußklemmen eine Spannung vorhanden sein.

Man sagt dazu "es fällt eine Spannung am Widerstand ab".

Entsprechend gibt es dafür den Begriff "Spannungsabfall".



Der elektrische Widerstand eines Körpers hängt von verschiedenen Faktoren ab:

- vom Material
- von der Querschnittsfläche
- von der Länge
- von der Temperatur

Abhängigkeit des Widerstandes von Material und Geometrie

- Je länger ein Leiter ist, desto größer ist sein Widerstand.
- Je größer die Querschnittsfläche ist, desto kleiner ist der Widerstand.
- Die Materialabhängigkeit wird durch den spezifischen Widerstand ϱ bzw. die elektrische Leitfähigkeit κ berücksichtigt.

Es gilt :

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{A} = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

l : Länge des Leiters
A : Querschnittsfläche des Leiters
ϱ : spezifischer Widerstand
κ : elektrische Leitfähigkeit (Kehrwert von ϱ)

Gebräuchliche Einheiten von ϱ und κ sind:

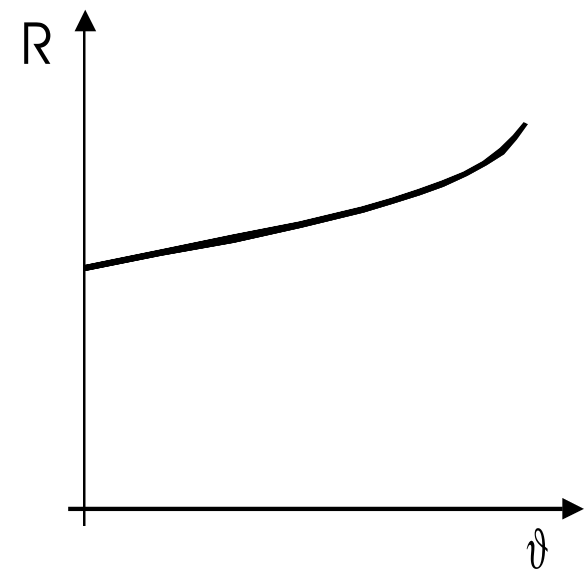
$$[\varrho] = \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = 10^{-4}\,\Omega \cdot \mathrm{cm} = 10^{-6}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$$

$$[\kappa] = \frac{\mathrm{m}}{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2} = \frac{\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2} = 10^{6}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}} = 10^{4}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{cm}}$$

Die Einheiten Ωm bzw S/m werden eher bei Isolationsstoffen verwendet.

Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur

Der elektrische Widerstand eines Leiters folgt einer im allg. nichtlinearen Temperaturkennlinie.



In kleineren Temperaturbereichen kann die Kennlinie näherungsweise linear angenommen werden. Man bestimmt dann den Widerstandswert *R* aus dem Ausgangswert z.B. bei 20 °C (R_{20}) und dem Temperaturkoeffizienten α.

$$R_\vartheta = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

R_ϑ : ist der Widerstand bei der Temperatur ϑ
R_{20} : ist der Widerstand bei der Bezugstemperatur (20°C)
α : ist der materialspezifische Temperaturkoeffizient.
$\Delta\vartheta$: ist der Temperaturunterschied zwischen ϑ und der Bezugstemperatur (20°C)

Temperaturkoeffizient

Der Temperaturkoeffizient α hat die Einheit 1/K.

- Es gibt Materialien mit positivem Temperaturkoeffizienten (PTC, Kaltleiter), deren Widerstand bei steigender Temperatur zunimmt
  und
- es gibt Materialien mit negativem Temperaturkoeffizienten (NTC, Heißleiter), deren Widerstand bei steigender Temperatur abnimmt

Beispiele:

Kupfer: $\alpha = 3{,}93 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$

Aluminium: $\alpha = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$

Konstantan: $\alpha = 0{,}01 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$

Wenn die Näherung des „Temperaturgangs“ durch eine lineare Funktion nicht ausreicht, kann die Temperaturabhängigkeit durch weitere Terme verfeinert werden. Hierzu werden dann zusätzliche Temperaturkoeffizienten benutzt (Es handelt sich dabei um eine Reihenentwicklung).

$$R_{\vartheta} = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta + \beta \cdot (\Delta\vartheta)^2 + \ldots)$$

Widerstände in der Technik

- Es gibt „ungewollte Widerstände“, z.B. den Leitungswiderstand, der nur im Idealfall null ist, oder den Isolationswiderstand von Nichtleitern, der in der Praxis nie unendlich groß ist.
- Auf der anderen Seite gibt es Widerstandsbauelemente in großer Anzahl und in unterschiedlichen Bauformen.
- Viele Sensoren geben ihr Meßsignal in Form einer Widerstandsänderung aus (Temperatur, Dehnung ...).

Die wichtigsten Kennwerte des Bauelementes „Widerstand“ sind:

- der Widerstandswert
- die Toleranz
- die maximale Verlustleistung (Dauerbelastung)
- die Impulsbelastbarkeit
- der Temperaturkoeffizient
- die Spannungsfestigkeit

Es gibt verschiedene Technologien und Bauformen:

- Festwiderstände und veränderliche Widerstände (Potentiometer)
- Schichtwiderstände und Drahtwiderstände
- Bedrahtet und SMD (Surface Mounted Device)
- Leistungswiderstände
- ...

Verlustleistung an Widerständen

Ein Widerstand setzt die gesamte an ihm anfallende elektrische Leistung in Verlustwärme um. Die Verlustleistung errechnet sich daher gemäß

$$P = U \cdot I$$

und dem Ohm'schen Gesetz

$$U = R \cdot I$$

zu

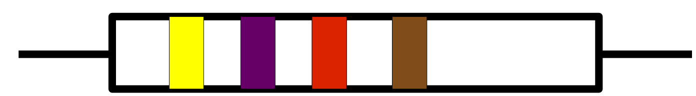
$$P = R \cdot I^2 \qquad \text{oder} \qquad P = \frac{U^2}{R}$$

Bei der Auswahl eines Widerstandes ist immer auch die maximale Verlustleistung zu beachten.

Kennzeichnung von Widerständen

Wenn der Wert eines Widerstandes aufgrund der Bauform nicht aufgedruckt werden kann, so werden farbige Ringe zur Kennzeichnung benutzt (allseitig ablesbar!). (Farbcoderechner im Internet z.B.: http://www.sengpielaudio.com/Farbcodewiderstaende04.htm)

Farbe	Wert	Multiplikator	Toleranz	α
keine			± 20%	
silber		$10^{-2}\,\Omega = 0{,}01\,\Omega$	± 10%	
gold		$10^{-1}\,\Omega = 0{,}1\,\Omega$	± 5%	
schwarz	0	$10^{0}\,\Omega = 1\,\Omega$		$\pm\ 200 \cdot 10^{-6}\,K$
braun	1	$10^{1}\,\Omega = 10\,\Omega$	± 1%	$\pm\ 100 \cdot 10^{-6}\,K$
rot	2	$10^{2}\,\Omega = 100\,\Omega$	± 2%	$\pm\ 50 \cdot 10^{-6}\,K$
orange	3	$10^{3}\,\Omega = 1\,k\Omega$		$\pm\ 15 \cdot 10^{-6}\,K$
gelb	4	$10^{4}\,\Omega = 10\,k\Omega$		$\pm\ 25 \cdot 10^{-6}\,K$
grün	5	$10^{5}\,\Omega = 100\,k\Omega$	± 0,5%	
blau	6	$10^{6}\,\Omega = 1\,M\Omega$	± 0,25%	
violett	7	$10^{7}\,\Omega = 10\,M\Omega$	± 0,1%	
grau	8	$10^{8}\,\Omega = 100\,M\Omega$		
weiß	9	$10^{9}\,\Omega = 1\,G\Omega$		



Beispiel:
gelb – violett – rot - braun =
$47 \cdot 10^{2}\,\Omega = 4{,}7\,k\Omega$, ± 1 %
(keine Angabe des Temperaturkoeffizienten)

Die Kennzeichnung der noch kleineren SMD-Bauformen erfolgt mit Buchstaben- und Zahlencodes.

Normreihen

Widerstände werden nicht in jedem beliebigen Wert produziert, sondern nur in gewissen Abstufungen. Diese Abstufungen sind normiert und werden als E-Reihen (Normreihen) bezeichnet.
Gemäß DIN IEC 63 gibt es die Reihen E6, E12, E24, E48, E96 und E192. Je größer die E-Reihe, desto kleiner sind die Toleranzen der Bauteile.
Hier als Beispiel die Reihen E6, E12 und E24:

E6	E12	E24
1	1	1
		1,1
	1,2	1,2
		1,3
1,5	1,5	1,5
		1,6
	1,8	1,8
		2
2,2	2,2	2,2
		2,4
	2,7	2,7
		3
3,3	3,3	3,3
		3,6
	3,9	3,9
		4,3
4,7	4,7	4,7
		5,1
	5,6	5,6
		6,2
6,8	6,8	6,8
		7,5
	8,2	8,2
		9,1

Beispiele:

Es gibt Widerstände mit den Werten 1,2 Ω, 120 Ω, 12 kΩ ...

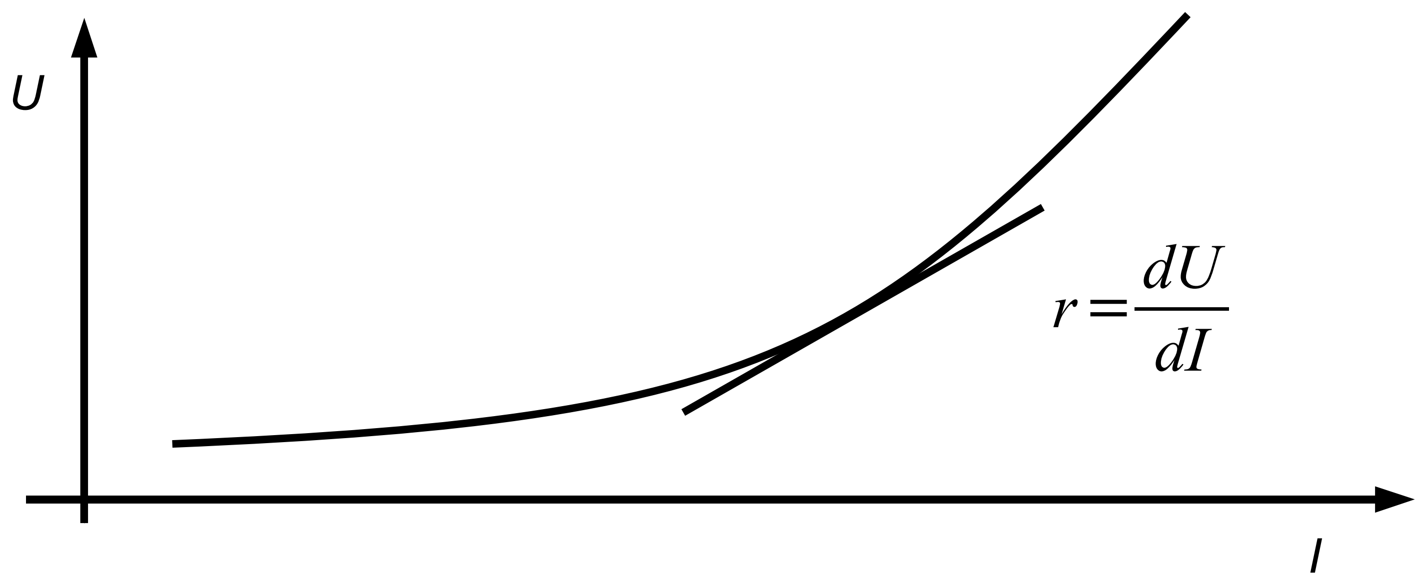
Einen Wert von 1,3 kΩ findet man nur ab der E24-Reihe.

140 Ω gibt es in diesen drei Normreihen nicht.

Nichtlineare Widerstände

Der lineare Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung, welcher durch das Ohm'sche Gesetz beschrieben wird, gilt nicht in allen Fällen.

Bei nichtlinearen Kennlinien kann in Anlehnung an das Ohm'sche Gesetz der sogenannte differentielle Widerstand definiert werden.
Der differentielle Widerstand wird mit r abgekürzt und entspricht der Steigung der U-I-Kennlinie an einem bestimmten Punkt.

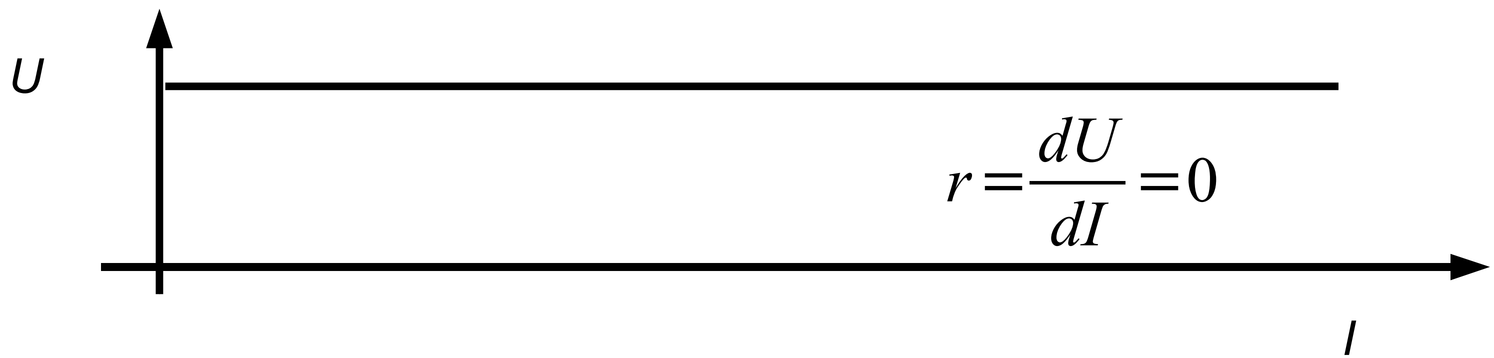


Betreibt man den Widerstand nur in der Nähe eines festen Arbeitspunktes, so kann man mit dem differentiellen Widerstand an diesem Arbeitspunkt rechnen.

ideale Spannungsquelle

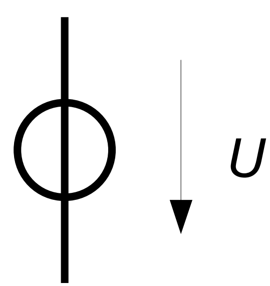
Eine ideale Spannungsquelle zeichnet sich dadurch aus, dass die Spannung an den Klemmen sich nicht ändert, wenn der entnommene Strom verändert wird.

Die U-I-Kennlinie einer solchen Spannungsquelle ist eine waagrechte Linie. Der differentielle Widerstand der Spannungsquelle, ihr sogenannter Innenwiderstand ist null.



$$r = \frac{dU}{dI} = 0$$

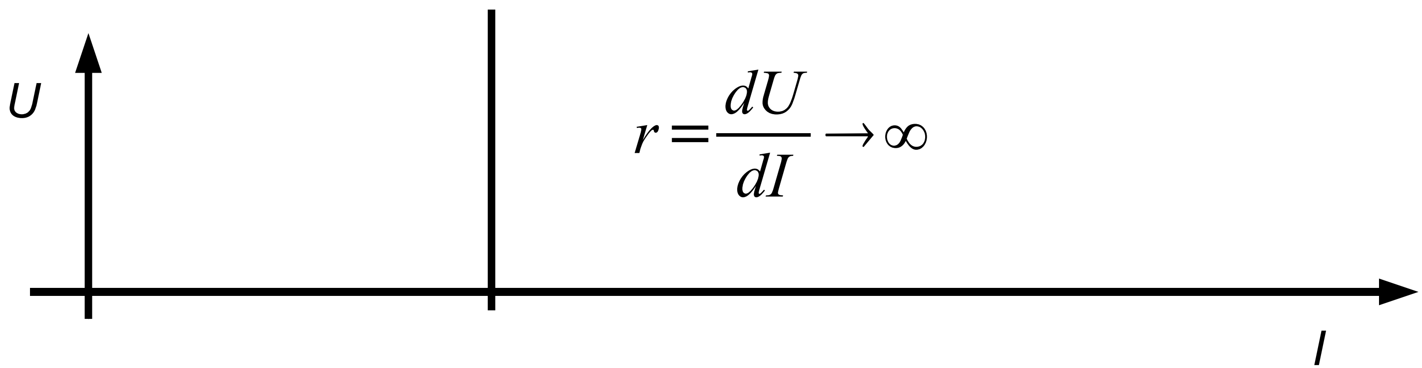
Das Schaltsymbol der idealen Spannungsquelle ist ein Kreis mit durchgezogener Verbindungslinie (symbolisiert den Innenwiderstand null).



ideale Stromquelle

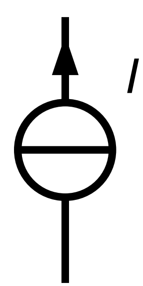
Eine ideale Stromquelle liefert immer einen gleichen Strom, unabhängig welche Spannung an den Klemmen anliegt.

Bei der Stromquelle ist die U-I-Kennlinie eine senkrechte Linie. Der differentielle Widerstand der Stromquelle, ihr Innenwiderstand, geht gegen unendlich.



$$r = \frac{dU}{dI} \rightarrow \infty$$

Das Schaltsymbol der idealen Stromquelle ist ein Kreis mit mit einer Querlinie (als Symbol für den unendlichen Innenwiderstand).



Reale Quellen

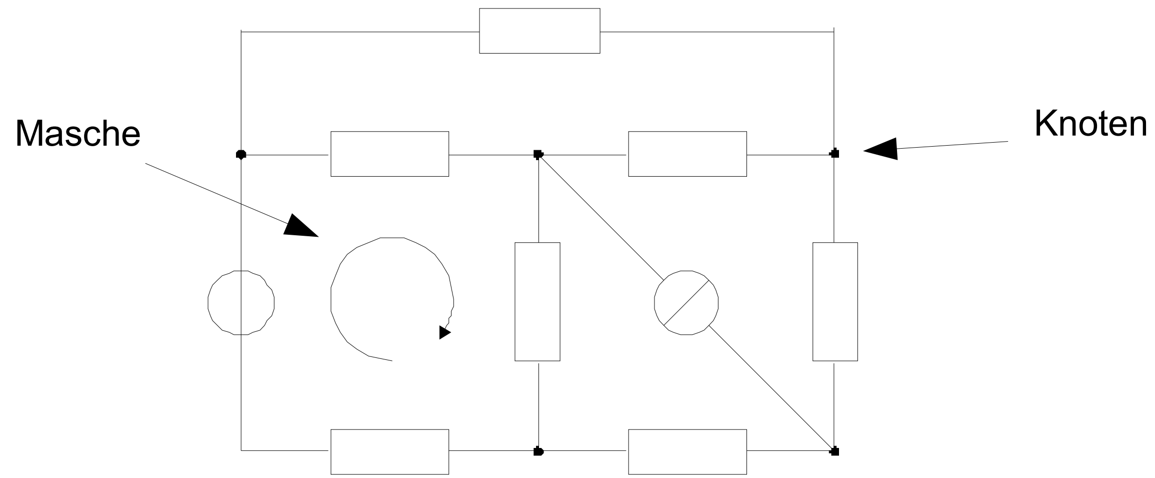
Die idealen Quellen können in der Elektrotechnik nur angenähert werden.

Reale Spannungsquellen zeichnen sich dadurch aus, dass die Spannung über einen weiten Strombereich sich nur wenig ändert bzw. der differentielle Widerstand am Arbeitpunkt möglichst klein ist.
Galvanische Elemente (Batterien, Akkus) kommen diesem Ideal nahe, solange sie noch ausreichend geladen sind.
Auch können elektronische Geräte über Regelkreise in bestimmten Grenzen eine ideale Spannungsquelle bilden (die meisten Netzgeräte arbeiten als Spannungsquellen).

Die **reale Stromquelle** treibt über einen weiten Spannungsbereich einen annähernd gleichen Strom durch den Stromkreis.
Sie hat (zumindest am Arbeitspunkt) einen hohen differentiellen Widerstand.
Auch dieses Verhalten kann durch elektronische Regelung erreicht werden.
Ein Beispiel sind Ladegeräte, welche unabhängig vom Ladezustand des Akkus einen gleichmäßigen Ladestrom einprägen.
In elektronischen Schaltungen, auch im Innern von integrierten Schaltkreisen, werden oft Stromquellen eingesetzt (Schaltungsteile, welche einen konstanten Strom liefern).

Netzwerkmodell

Zur Berechnung realer elektrischer Schaltungen wird zunächst ein idealisiertes Modell der Schaltung erstellt.
Dieses Modell (Graph oder Netzwerk genannt) setzt sich aus sogenannten Zwei- und Vierpolen zusammen.



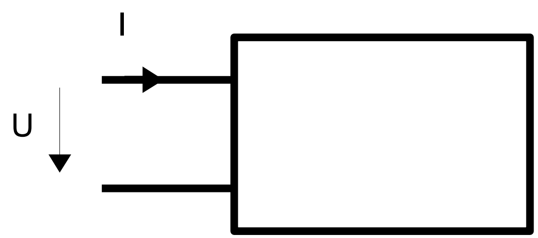
Es werden folgende Vereinfachungen getroffen:

- Leitungen werden als ideal leitfähig, also widerstandsfrei, angenommen.
- Alle Bauelemente gelten als zeitinvariant, ihre Parameter ändern sich also nicht mit der Zeit.
- Reale Bauelemente werden durch ideale Schaltungselemente angenähert.

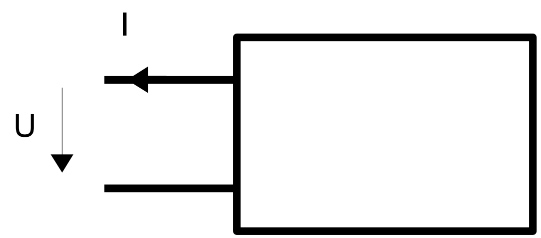
Die Verbindungspunkte der Schaltungselemente heißen "Knoten". Ein beliebiger geschlossener Weg durch den Graph heißt "Masche".

Zweipole

Zweipole sind Schaltungsteile, welche über genau zwei Anschlüsse verfügen.



Verbraucherzählpfeilsystem



Erzeugerzählpfeilsystem

Ein Zweipol wird durch den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung an seinen Klemmen beschrieben. Dies kann durch eine Gleichung oder durch eine Kennlinie geschehen.

Die positive Richtung von Strom und Spannung wird durch die Zählpfeile angegeben. Man unterscheidet zwischen dem Verbraucher- und dem Erzeugerzählpfeilsystem.

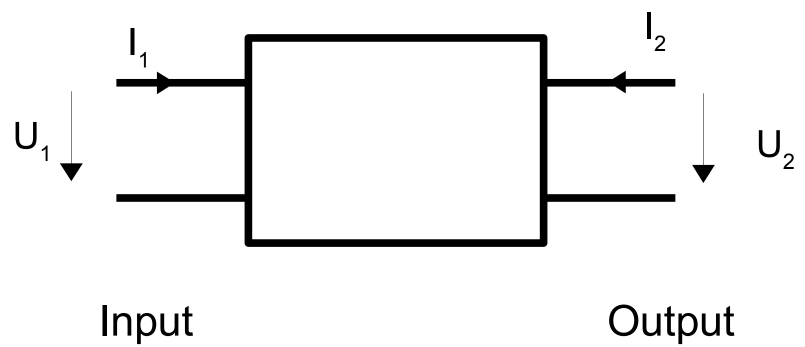
Klassifizierung von Zweipolen:

aktiv – passiv
linear - nichtlinear

Beispiele für Zweipole:
Widerstände, Strom- und Spannungsquellen

Vierpole

Zur Beschreibung von Netzwerken gibt es noch sogenannte Vierpole (auch Zweitore genannt). Diese Schaltungsteile haben vier Anschlüsse, wobei die Größen Spannung und Strom von der Eingangsseite (Input) auf die Ausgangsseite (Output) und umgekehrt wirken.



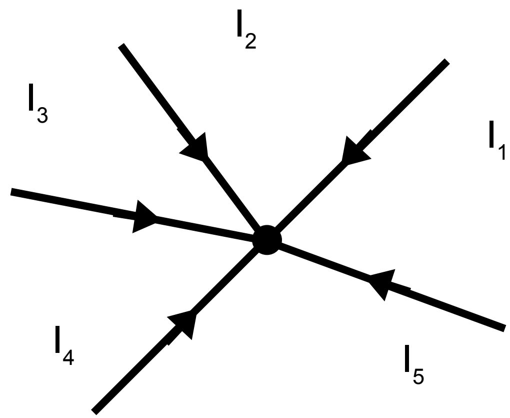
Für die exakte Beschreibung des Verhaltens eines Vierpols sind die Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom an Ein- und Ausgang sowie die Kopplung der Eingangs- auf die Ausgangsgrößen und umgekehrt nötig. Diese Beschreibung erfolgt z.B. über Kennlinienfelder oder Matrizengleichungen.

Beispiele für Vierpole:

Transformator, Optokoppler, elektronische Schaltungen (Verstärker), Spannungsteiler, elektrische Leitung.

Das erste Kirchhoff'sche Gesetz

Das erste Kirchhoff'sche Gesetz, die sogenannte **Knotenregel**, besagt, dass die Summe aller in einen Knoten hineinfließenden Ströme gleich der Summe der herausfließenden Ströme ist.

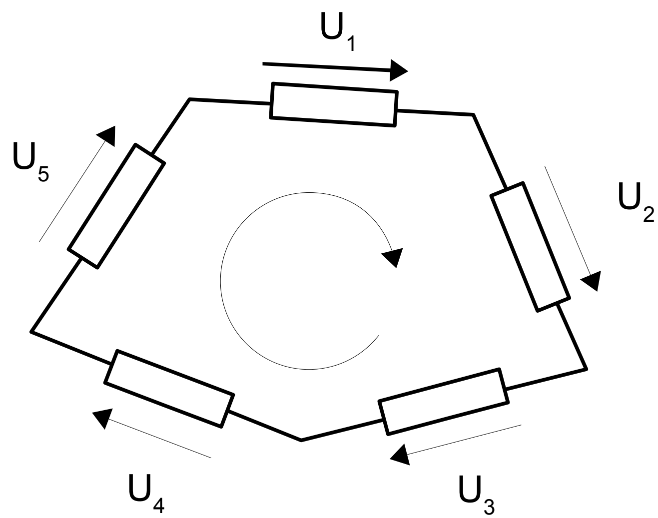


Betrachtet man die Zählpfeile der Ströme und nimmt z.B. alle zum Knoten hinfließ-enden Ströme als positiv, die wegfließenden als negativ, so gilt ganz allgemein, dass die Summen aller Ströme an einem Knoten Null ergibt.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz

Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz, die sogenannte **Maschenregel** besagt, dass bei einem geschlossenen Weg durch den Graphen eines Netzwerks die Summe aller Spannungen Null ergibt:

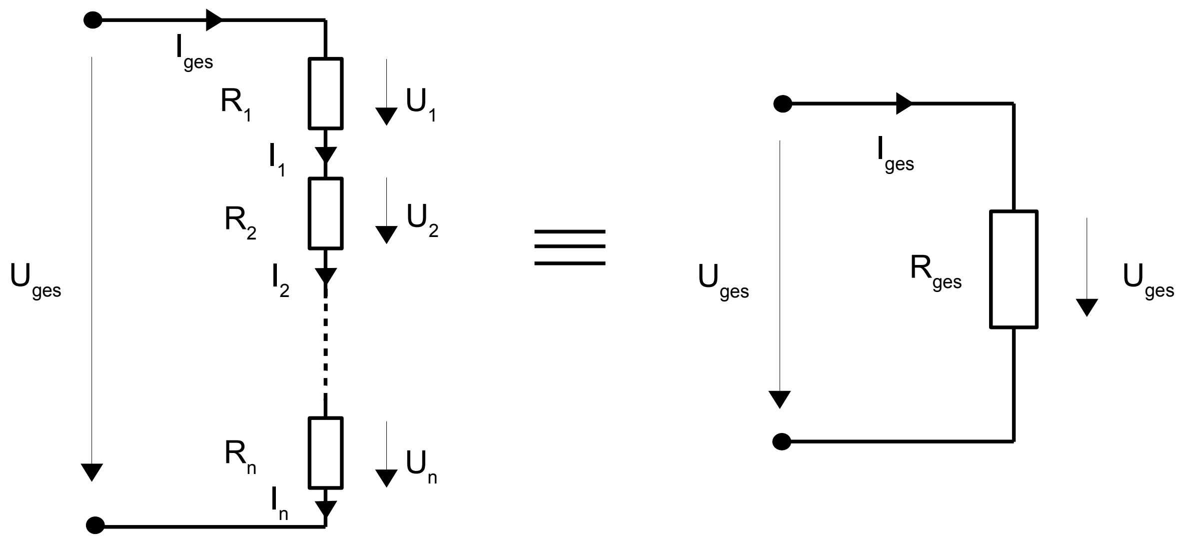


Spannungen, deren Zählpfeil in Umlaufrichtung der Masche zeigen, werden positiv gezählt, steht der Zählpfeil gegen die Umlaufrichtung, wird die Spannung negativ gezählt.

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

Reihenschaltung von Widerständen

Statt einer Gruppe von Widerständen, die in Reihe geschaltet sind, kann zur Berechnung des Netzwerks auch ein Ersatzwiderstand eingesetzt werden.



Der Ersatzwiderstand einer Reihenschaltung ist die Summe der Einzelwiderstände:

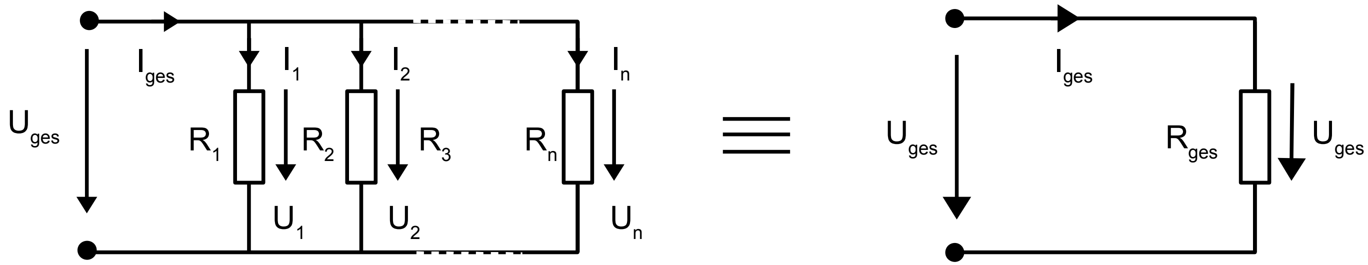
$$R_{ges} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Bei der Reihenschaltung werden alle Einzelwiderstände vom gleichen Strom durchflossen. Die gesamte an die Schaltung angelegte Spannung teilt sich auf die Einzelwiderstände auf. Man spricht daher auch von einem **Spannungsteiler**.
Die Teilspannungen verhalten sich wie die Einzelwiderstände. Im Beispiel also:

$$U_1 : U_2 : \ \ldots \ : U_n = R_1 : R_2 : \ \ldots \ : R_n$$

Parallelschaltung von Widerständen

Statt einer Gruppe von Widerständen, die parallel geschaltet sind, kann zur Berechnung des Netzwerks auch ein Ersatzwiderstand eingesetzt werden.



Für den Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Benutzt man statt des Widerstands den Leitwert, so gilt:
Der Ersatzleitwert ist die Summe der Einzelleitwerte.

$$G_{ges} = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Bei zwei parallelgeschalteten Widerständen beträgt der Ersatzwiderstand:

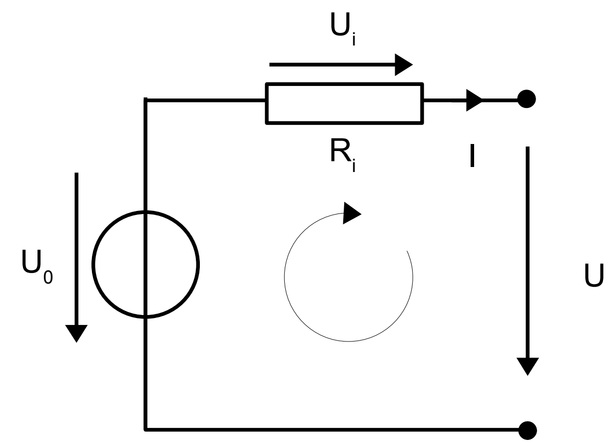
$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Bei der Parallelschaltung ist die Spannung an allen Widerständen gleich, und der Strom teilt sich in entsprechende Einzelströme auf. Man spricht auch vom **Stromteiler**. Die Teilströme verhalten sich wie die Kehrwerte der Widerstände bzw. wie die Leitwerte:

$$I_1 : I_2 : \ldots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \ldots : \frac{1}{R_n} = G_1 : G_2 : \ldots : G_n$$

Ersatzspannungsquelle

Schaltet man in Reihe mit einer idealen Spannungsquelle einen ohm'schen Widerstand, so ergibt sich folgender Zweipol (im Erzeugerzählpfeilsystem):

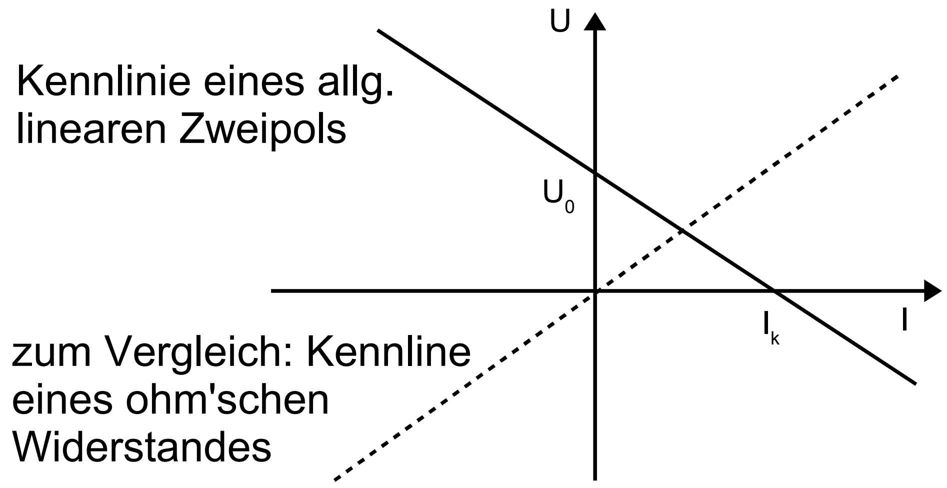


Die eingezeichnete Masche ergibt die Maschengleichung:

$$U - U_0 + U_i = 0$$

mit (Ohm'sches Gesetz!): $U_i = R_i \cdot I$

und aufgelöst nach U: $U = U_0 - R_i \cdot I$



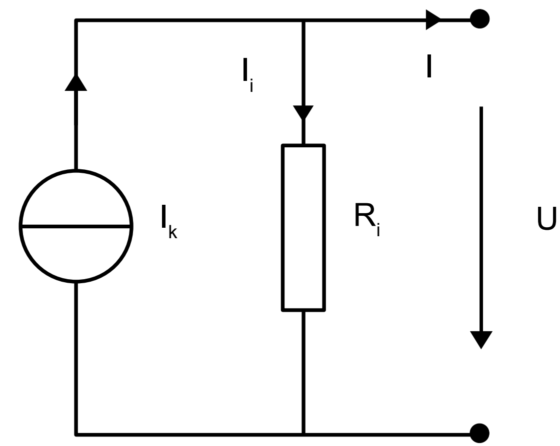
Hierbei handelt es sich um eine Geradengleichung. Sie beschreibt den allgemeinen Fall eines aktiven linearen Zweipols.

U_0 : Leerlaufspannung
I_k : Kurzschlussstrom
R_i : Innenwiderstand

Jeder Zweipol aus Widerständen und Quellen kann durch eine solche Schaltung ersetzt werden. Daher bezeichnet man diese Schaltung als **Ersatzspannungsquelle**.

Ersatzstromquelle

Schaltet man parallel zu einer idealen Stromquelle einen ohm'schen Widerstand, so ergibt sich folgender Zweipol:



Laut Knotenregel gilt: $I_k - I_i - I = 0$

also $I_i = I_k - I$

Nach dem Ohm'schen Gesetz ist $U = R_i \cdot I_i$

Einsetzen von I_i ergibt: $U = R_i \cdot I_k - R_i \cdot I$

Vergleicht man diese Geradengleichung mit der der Ersatzspannungsquelle

$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

so sind die Gleichungen und damit auch die Schaltungen identisch, wenn gilt:

$$U_0 = R_i \cdot I_k$$

Auch diese Schaltung kann als Ersatz für beliebige lineare Zweipole benutzt werden. Man bezeichnet diese Schaltung als **Ersatzstromquelle**.

Umwandlung eines Zweipols in eine Ersatzspannungs- oder -stromquelle

Um einen beliebigen linearen Zweipol in eine Ersatzspannungsquelle oder -stromquelle umzuwandeln, sind zwei der drei Kenngrößen Leerlaufspannung U_0, Kurzschlussstrom I_k und Innenwiderstand R_i zu ermitteln.
Die fehlende Größe kann dann berechnet werden aus: $U_0 = R_i \cdot I_k$

Ist der innere Aufbau des Zweipols bekannt, so lassen sich die Größen durch theoretische Überlegungen finden:

- Die Leerlaufspannung ist die Spannung an den offenen Klemmen (Strom I = 0).
- Der Kurzschlussstrom ist der Strom, welcher bei kurzgeschlossenen (d.h. verbundenen) Klemmen fließt (Spannung U = 0).
- Der Innenwiderstand entspricht dem Widerstand zwischen den Klemmen, wenn alle internen Quellen zu null gemacht werden (Spannungsquellen werden Verbindungen, Stromquellen sind Unterbrechungen).

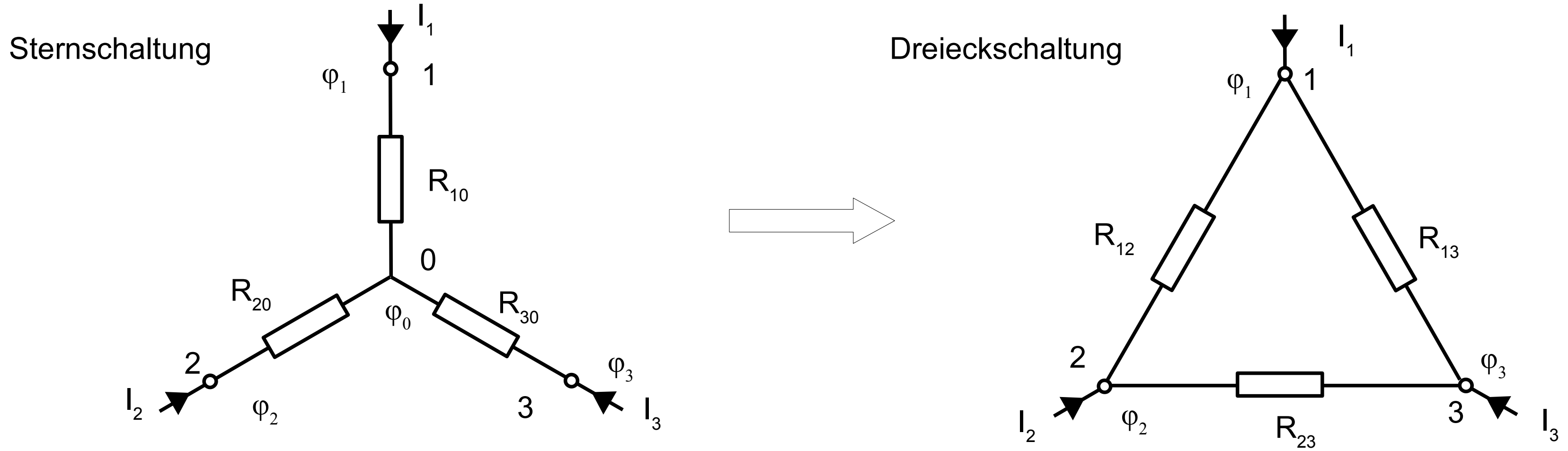
Ist der innere Aufbau des Zweipols nicht bekannt, so muss die Strom/Spannungskennlinie durch Messung an den Klemmen ermittelt werden. Dabei reichen zwei Wertepaare (I_1|U_1) und (I_2|U_2), um U_0 und R_i der Geradengleichung zu berechnen:

(1) $U_1 = U_0 - R_i \cdot I_1$
(2) $U_2 = U_0 - R_i \cdot I_2$

$$\Rightarrow \quad R_i = -\frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1} \qquad U_0 = U_1 + R_i \cdot I_1 = U_2 + R_i \cdot I_2$$

Stern-Dreieck-Umwandlung

Die Stern- bzw. Dreieckschaltung läßt sich mit den bisherigen Umformungen nicht vereinfachen. Die beiden Schaltungen können jedoch ineinander überführt werden.



Wählt man die Widerstände der Dreieckschaltung gemäß folgender Gleichungen, so stimmt das Klemmenverhalten überein, d.h. bei gleichen Klemmenpotentialen φ_i stellen sich die gleichen Klemmenströme I_i ein.

$$R_{12}=R_{10}\cdot R_{20}\cdot\left(\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R_{30}}\right)=\frac{R_{10}\cdot R_{20}}{R_0}$$

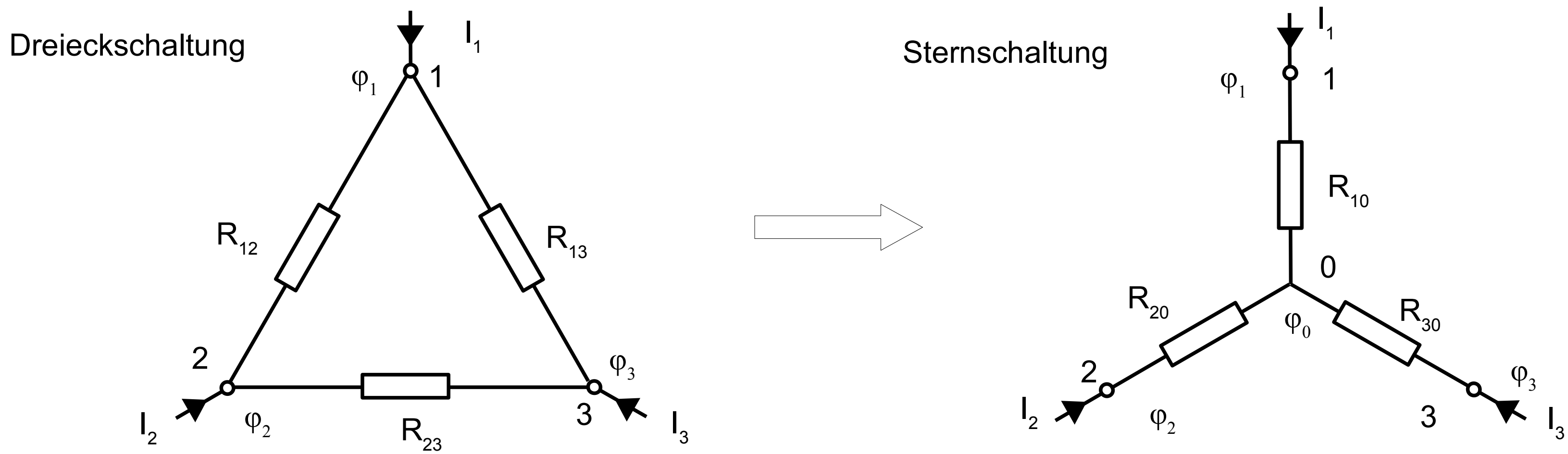
$$R_{13}=R_{10}\cdot R_{30}\cdot\left(\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R_{30}}\right)=\frac{R_{10}\cdot R_{30}}{R_0}$$

$$R_{23}=R_{20}\cdot R_{30}\cdot\left(\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R_{30}}\right)=\frac{R_{20}\cdot R_{30}}{R_0}$$

unter Verwendung der Abkürzung R_0 für die Parallelschaltung aller Sternwiderstände, also mit

$$\frac{1}{R_0}=\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R_{30}} \quad \text{(Sternleitwert)}$$

Dreieck-Stern-Umwandlung



Die Dreieckschaltung kann durch eine Sternschaltung ersetzt werden mit den Sternwiderständen

$$R_{10} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{(R_{12} + R_{13} + R_{23})} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{123}}$$

$$R_{20} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{(R_{12} + R_{13} + R_{23})} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{123}}$$

$$R_{30} = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{(R_{12} + R_{13} + R_{23})} = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{123}}$$

unter Verwendung der Abkürzung R_{123} für die Reihenschaltung aller Dreieckswiderstände, also mit $R_{123} = R_{12} + R_{13} + R_{23}$ (Umlaufwiderstand)

Systematik der Stern-Dreieck Äquivalenz

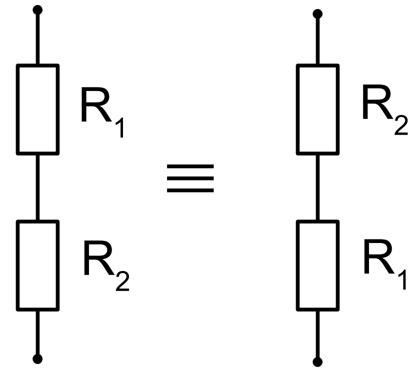
Die Umrechnungsformeln zwischen der Stern- und der Dreieckschaltung haben eine gewisse Systematik, welche als Merkregel benutzt weden kann:

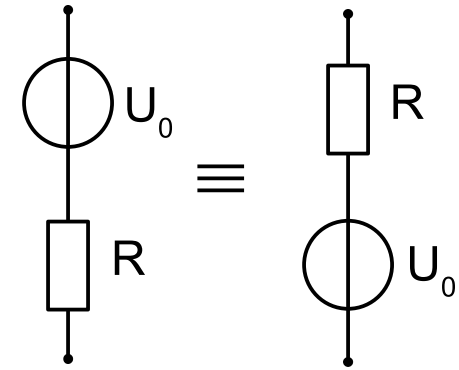
- Der Sternwiderstand einer Klemme ergibt sich aus dem Produkt der an dieser Klemme angeschlossenen Dreieckswiderstände, dividiert durch die Reihenschaltung aller Dreieckswiderstände.

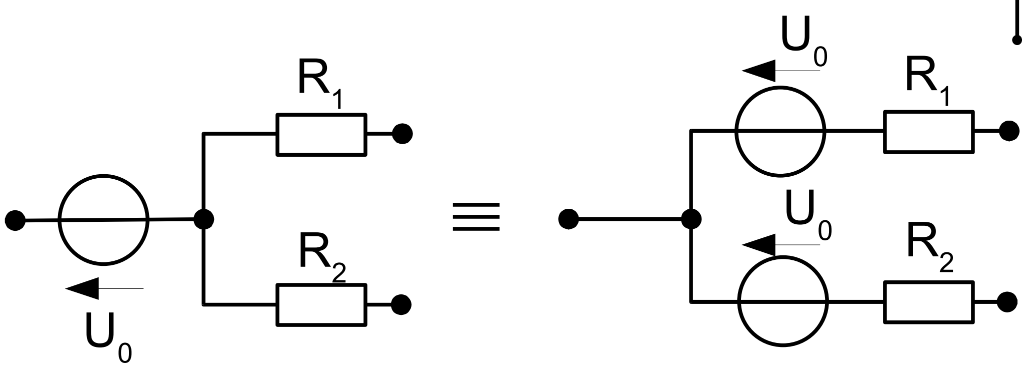
- Der Dreieckswiderstand zwischen zwei Klemmen ergibt sich aus dem Produkt der an den Klemmen angeschlossenen Sternwiderstände, dividiert durch die Parallelschaltung aller Sternwiderstände.

Weitere Umformungen eines Netzwerks
(Beispiele)

Vertauschung der in Reihe geschalteten Komponenten eines Zweiges.

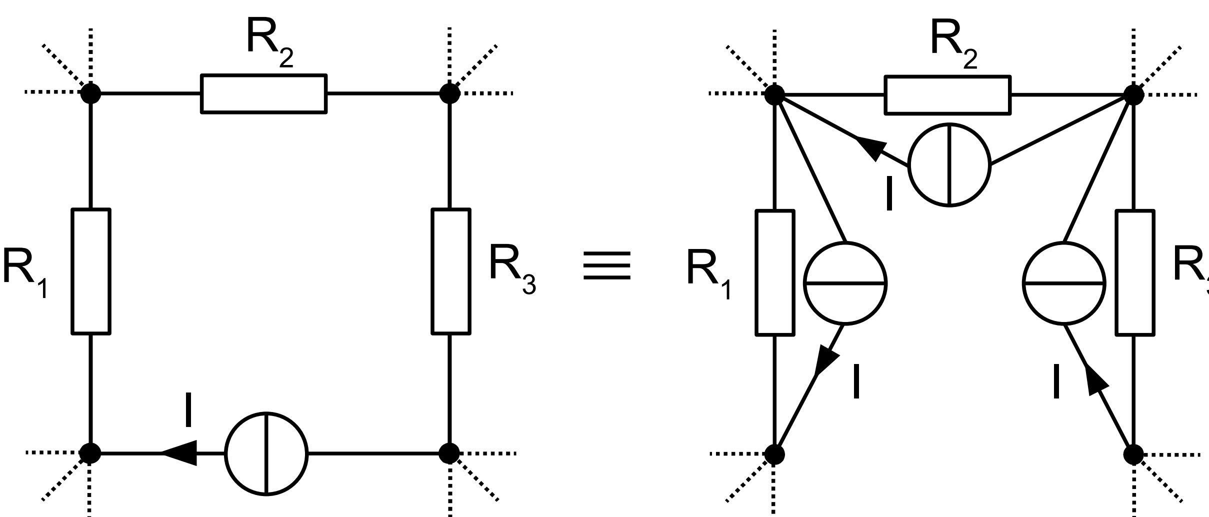






Verschieben von Spannungsquellen.

Verschieben von Stromquellen.

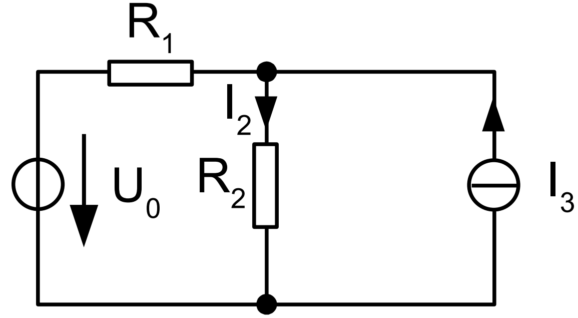


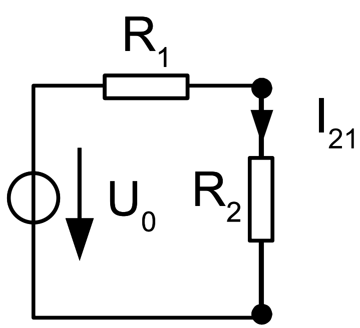
Superpositionsprinzip

In linearen Netzwerken überlagern sich in jedem Zweig des Netzwerks die Wirkungen der einzelnen Quellen.
Man kann also alle bis auf eine Quelle zu null machen, um die Auswirkung dieser Quelle auf das Netz zu berechnen. Die resultierenden Ströme und Spannungen in den Zweigen müssen dann für jede Quelle addiert werden.

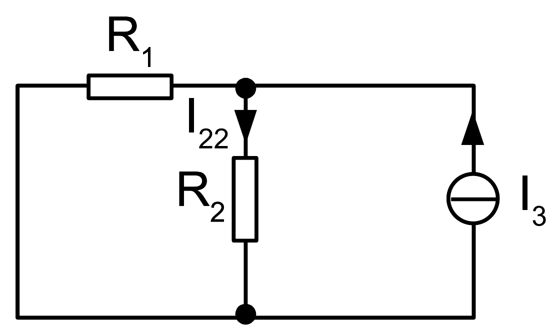
- Nicht benötigte Spannungsquellen werden durch eine Verbindung ersetzt.
- Nicht benötigte Stromquellen werden weggelassen.

Beispiel:





$$I_{21} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$



$$\frac{I_{22}}{I_3} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad \text{(Stromteiler)}$$

$$I_{22} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot I_3}{(R_1 + R_2) \cdot R_2} = \frac{R_1 \cdot I_3}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 \cdot I_3}{R_1 + R_2} = \frac{U_0 + R_1 \cdot I_3}{R_1 + R_2}$$

Berechenbarkeit von linearen Netzen

Gegeben sei ein Netz aus Knoten und linearen Zweipolen als Verbindungszweige,
mit k : Anzahl der Knoten und z : Anzahl der Zweige
Die Daten der Zweipole (Quellenspannung oder -strom und Innenwiderstand) seien bekannt. Bei reinen Widerständen sind die Quellenspannungen bzw. -ströme gleich null. In jedem der z Zweige sind Strom und Spannung gesucht, also insgesamt 2·z Unbekannte. Wir benötigen also 2·z unabhängige Gleichungen zur Lösung.

Zur Berechnung stehen zur Verfügung:

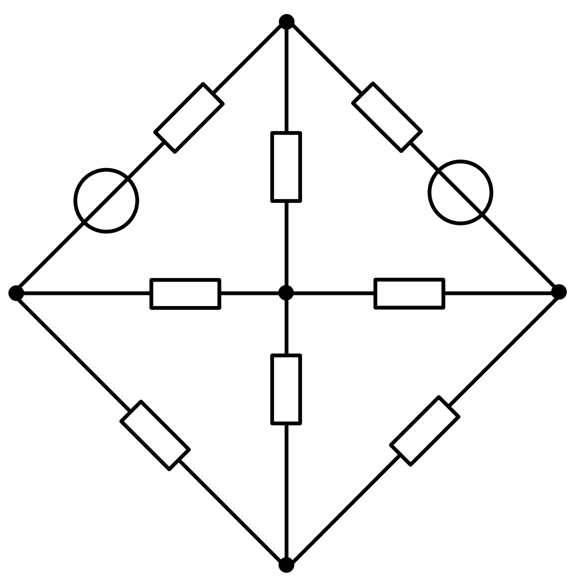
- Das Ohm'sche Gesetz bzw. die Zweipolgleichung: In jedem der z Zweige sind Strom und Spannung miteinander verknüpft. Diese Gleichungen sind unabhängig. → z Gleichungen
- Die Knotenregel: Für jeden Knoten des Netzes lässt sich eine Knotengleichung aufstellen. Dabei ist die letzte Gleichung von den anderen abhängig.
  → k - 1 Gleichungen
- Die Maschenregel: Es gibt eine Vielzahl von möglichen Maschenumläufen. Es lässt sich zeigen, dass z-(k-1) dieser Maschengleichungen voneinander unabhängig sind. → z - (k - 1) Gleichungen

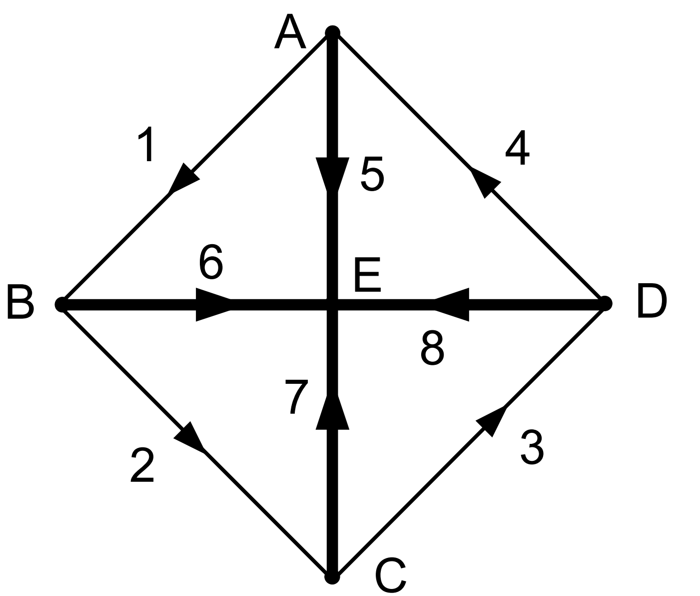
Das ergibt also genau die benötigten 2·z Gleichungen. Das Netz lässt sich also in jedem Fall berechnen. Aufgabe der „Zweigstromanalyse“ ist es, die voneinander unabhängigen Gleichungen zur Berechnung des Netzes aufzustellen.

Zweigstromanalyse (Vorbereitung)

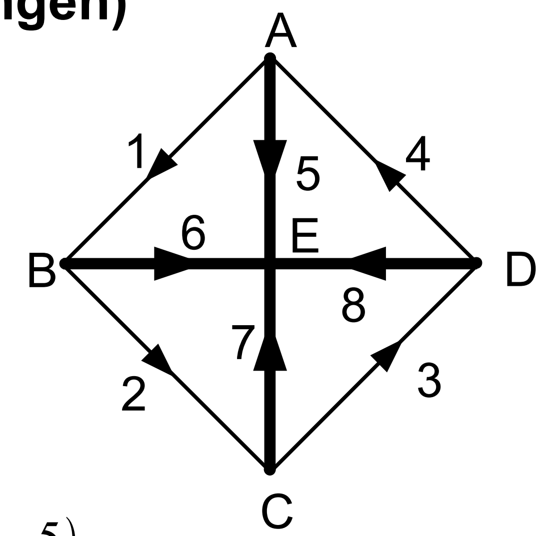
- Das Netzwerk wird auf seine Topologie reduziert.
- In den Zweigen werden Zählpfeile festgelegt. Die Zählpfeile gelten sowohl für den Strom als auch für die Spannung.
- Die Zweige und Knoten werden benannt.
  Knoten erhalten z.B. Buchstaben, Zweige werden durchnummeriert.
- Man bestimmt einen "vollständigen Baum".
  Ein vollständiger Baum ist ein Weg im Netz, der alle Knoten berührt, jedoch keine geschlossene Masche enthält.

Beispiel:





Zweigstromanalyse (Aufstellen der Gleichungen)



Im Beispiel gibt es 16 Unbekannte ($\boldsymbol{I}_{1..8}$, $\boldsymbol{U}_{1..8}$)

Die benötigten unabhängigen Gleichungen werden folgendermaßen erstellt:

- Aufstellen der Knotengleichungen:
  Es wird ein Knoten weggelassen!
  => (k-1) Knotengleichungen.

$$-\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_4-\boldsymbol{I}_5=0 \qquad (A)$$
$$+\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{I}_6=0 \qquad (B)$$
$$+\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{I}_7=0 \qquad (C)$$
$$+\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{I}_4-\boldsymbol{I}_8=0 \qquad (D)$$

- Aufstellen der Maschengleichungen:
  Für jeden Zweig **außerhalb** des Baumes wird eine Maschengleichung gebildet. Die Masche wird über Baumzweige geschlossen.
  => z-(k-1) Maschengleichungen.

$$+\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{U}_6-\boldsymbol{U}_5=0 \qquad (1-6-5)$$
$$+\boldsymbol{U}_2+\boldsymbol{U}_7-\boldsymbol{U}_6=0 \qquad (2-7-6)$$
$$+\boldsymbol{U}_3+\boldsymbol{U}_8-\boldsymbol{U}_7=0 \qquad (3-8-7)$$
$$+\boldsymbol{U}_4+\boldsymbol{U}_5-\boldsymbol{U}_8=0 \qquad (4-5-8)$$

- Zweipolgleichungen:
  Für jeden Zweig des Netzes gilt noch die Zweipolgleichung, wahlweise in der Form
  $U = U_0 + R \cdot I$ oder $I = I_0 + G \cdot U$
  (U_0 bzw. I_0 sind ggf. null)
  => z Zweipolgleichungen.

$$\boldsymbol{U}_1=U_{01}+R_1\cdot\boldsymbol{I}_1 \qquad (Z1)$$
$$\boldsymbol{U}_2=U_{02}+R_2\cdot\boldsymbol{I}_2 \qquad (Z2)$$
$$\boldsymbol{U}_3=U_{03}+R_3\cdot\boldsymbol{I}_3 \qquad (Z3)$$
$$\boldsymbol{U}_4=U_{04}+R_4\cdot\boldsymbol{I}_4 \qquad (Z4)$$
$$\boldsymbol{U}_5=U_{05}+R_5\cdot\boldsymbol{I}_5 \qquad (Z5)$$
$$\boldsymbol{U}_6=U_{06}+R_6\cdot\boldsymbol{I}_6 \qquad (Z6)$$
$$\boldsymbol{U}_7=U_{07}+R_7\cdot\boldsymbol{I}_7 \qquad (Z7)$$
$$\boldsymbol{U}_8=U_{08}+R_8\cdot\boldsymbol{I}_8 \qquad (Z8)$$

Zweigstromanalyse (Lösung des Gleichungssystems)

Zur Lösung des Gleichungssystems sind alle bekannten Verfahren der Mathematik geeignet.
Mit Hilfe der Zweipolgleichungen (Z1..8) lassen sich z.B. alle unbekannten Spannungen durch die Ströme ausdrücken (oder umgekehrt). Dadurch halbiert sich die Anzahl der Gleichungen.
Weitere Vereinfachungen ergeben sich durch geschickte Auswahl von abhängigen und unabhängigen Veränderlichen, welche in den folgenden Lösungsverfahren Verwendung findet.
Die Anwendung dieser Verfahren ermöglicht das schematische Aufstellen der Gleichungen direkt aus der Struktur des Netzwerks.

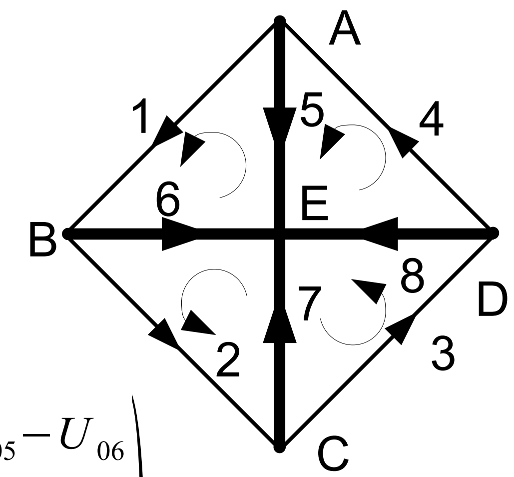
Maschenstromverfahren (Maschenanalyse)
Man definert als unabhängige Veränderliche sogenannte Maschenströme.
Die Zweigströme sind als Überlagerung der Maschenströme zu berechnen.

Knotenspannungsverfahren (Knotenpotentialverfahren, Knotenanalyse)
Man erklärt einen Knoten zum Bezugsknoten und definiert die Spannungen zwischen allen anderen Knoten und dem Bezugsknoten als unabhängige Veränderliche (Knotenpotentiale).
Die Spannung in einem Zweig ist dann die Differenz der anliegenden Knotenpotentiale.

Maschenstromverfahren (I)

- Für das Maschenstromverfahren ist es sinnvoll, vorhandene Stromquellen in Ersatzspannungsquellen umzurechnen.
- Das Netzwerk wird, wie für die Zweigstromanalyse üblich, vorbereitet. Ein vollständiger Baum wird gewählt.
- Die Ströme in den Verbindungszweigen (außerhalb des Baumes) sind die Maschenströme, welche bei diesem Verfahren zuerst berechnet werden. Die zugehörigen Maschen werden über die Baumzweige geschlossen (Für jeden Verbindungszweig eine Masche).
- Das dazu nötige Gleichungssystem in Matrizenschreibweise lautet $(\boldsymbol{R}) \cdot (\boldsymbol{I}) = (\boldsymbol{U_0})$; Es wird mit folgenden Regeln gebildet:
  - In der Hauptdiagonalen der Matrix (***R***) steht die Summe aller Widerstände des jeweiligen Maschenumlaufs (immer positiv!)
  - Die übrigen Elemente der Matrix (***R***) enthalten die Koppelwiderstände, also die Widerstände, welche den beiden zugeordneten Maschen gemeinsam sind. Das Vorzeichen der Koppelwiderstände ist positiv, wenn die beiden Maschenumläufe im entsprechenden Zweig gleichgerichtet sind. Bei entgegengesetztem Umlaufsinn ist der Koppelwiderstand negativ. Gibt es keine gemeinsamen Zweige, bleibt das Element null.
  - Der Quellenvektor $(\boldsymbol{U_0})$ enthält in jeder Zeile die Summe der Quellenspannungen der jeweiligen Masche. Eine Quellenspannung wird dabei positiv gezählt, wenn sie der Umlaufrichtung der Masche engegengerichtet (!) ist, ansonsten negativ.

Maschenstromverfahren (II)



Für das nebenstehende Beispiel ergibt sich nach diesen Regeln folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_5+R_6) & -R_6 & 0 & -R_5 \\ -R_6 & (R_2+R_6+R_7) & -R_7 & 0 \\ 0 & -R_7 & (R_3+R_7+R_8) & -R_8 \\ -R_5 & 0 & -R_8 & (R_4+R_5+R_8) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{01}+U_{05}-U_{06} \\ -U_{02}+U_{06}-U_{07} \\ -U_{03}+U_{07}-U_{08} \\ -U_{04}+U_{08}-U_{05} \end{pmatrix}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems lassen sich die Maschenströme I_1.. I_4 berechnen. Daraus ergeben sich die übrigen Ströme I_5.. I_8 aus den Knotengleichungen bzw. aus der Überlagerung der beteiligten Maschenströme:

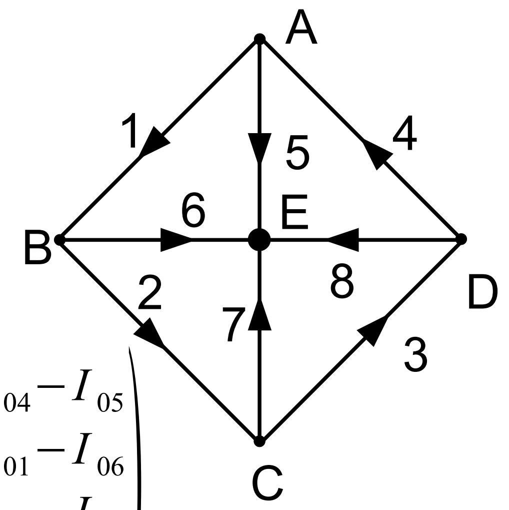
$$\begin{aligned} I_5 &= -I_1+I_4 \\ I_6 &= +I_1-I_2 \\ I_7 &= +I_2-I_3 \\ I_8 &= +I_3-I_4 \end{aligned}$$

Nun sind alle Zweigströme bekannt. Die zugehörigen Spannungen lassen sich aus $U = R \cdot I + U_0$ bestimmen. Das Netzwerk ist berechnet.

Knotenanalyse (I)

- Für die Knotenanalyse ist es sinnvoll, vorhandene Spannungsquellen in Ersatzstromquellen umzurechnen.
- Bei der Knotenanalyse wird mit Leitwerten gerechnet.
- Auch hier wird das Netzwerk auf seine Topologie vereinfacht und die Zweige und Knoten benannt.
- Man wählt einen Knoten als Bezugsknoten. Die Spannungen zwischen den Knoten und dem Bezugsknoten sind die Knotenspannungen bzw Knotenpotentiale, welche bei diesem Verfahren zuerst berechnet werden.
  (Für Knoten ohne Verbindung zum Bezugsknoten kann eine virtuelle Verbindung mit dem Leitwert null eingeführt werden).
- Das dazu nötige Gleichungssystem in Matrizenschreibweise lautet $(\boldsymbol{G}) \cdot (\boldsymbol{U}) = (\boldsymbol{I_0})$;
  Es wird mit folgenden Regeln gebildet:
  - In der Hauptdiagonalen der Matrix ($\boldsymbol{G}$) steht die Summe aller Leitwerte, die mit dem jeweiligen Knoten verbunden sind (immer positiv!)
  - Die übrigen Elemente der Matrix ($\boldsymbol{G}$) enthalten die Koppelleitwerte, also die Leitwerte, welche die beiden zugeordneten Knoten verbinden.
    Das Vorzeichen der Koppelleitwerte ist immer negativ. Gibt es keine direkte Verbindung, bleibt das Element null.
  - Der Quellenvektor ($\boldsymbol{I_0}$) enthält in jeder Zeile die Summe aller Quellenströme, welche mit dem jeweiligen Knoten verbunden sind. Ein Quellenstrom wird dabei positiv gezählt, wenn er in den Knoten hineinfließt, ansonsten negativ.

Knotenanalyse (II)



Für das nebenstehende Beispiel ergibt sich nach diesen Regeln folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} (G_1+G_4+G_5) & -G_1 & 0 & -G_4 \\ -G_1 & (G_1+G_2+G_6) & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & (G_2+G_3+G_7) & -G_3 \\ -G_4 & 0 & -G_3 & (G_3+G_4+G_8) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{01}+I_{04}-I_{05} \\ -I_{02}+I_{01}-I_{06} \\ -I_{03}+I_{02}-I_{07} \\ -I_{04}+I_{03}-I_{08} \end{pmatrix}$$

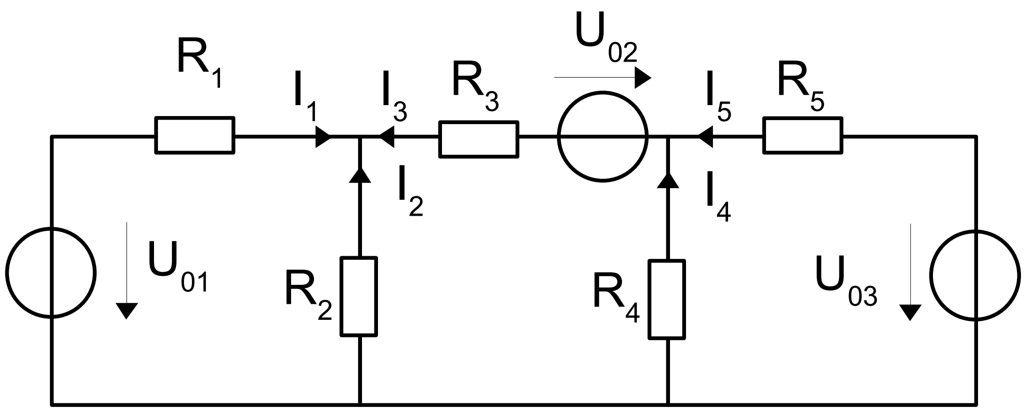
Durch Lösen des Gleichungssystems lassen sich die Knotenspannungen U_5.. U_8 berechnen. Daraus ergeben sich die übrigen Spannungen U_1.. U_4 aus den Maschengleichungen bzw. aus der Differenz der benachbarten Knotenspannngen:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_5 - U_6 \\ U_2 &= U_6 - U_7 \\ U_3 &= U_7 - U_8 \\ U_4 &= U_8 - U_5 \end{aligned}$$

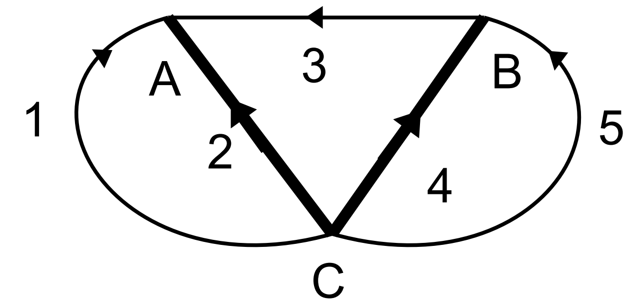
Nun sind alle Zweigspannungen bekannt. Die zugehörigen Ströme lassen sich aus $I = G \cdot U + I_0$ bestimmen. Das Netzwerk ist berechnet.

Beispiel zur Erstellung des Gleichungssystems (Zweigstromanalyse)

Gegeben sei das folgende Netzwerk:



Der zugehörige Graph mit einem möglichen vollständigen Baum:



1. Knotengleichungen für Knoten A und B

$$\boldsymbol{I_1} + \boldsymbol{I_2} + \boldsymbol{I_3} = 0 \qquad (A) \qquad (1)$$

$$-\boldsymbol{I_3} + \boldsymbol{I_4} + \boldsymbol{I_5} = 0 \qquad (B) \qquad (2)$$

2. Maschengleichungen für Zweig 1, 3 und 5

$$U_1 - U_2 = 0 \qquad (1-2)$$

$$U_2 - U_3 - U_4 = 0 \qquad (2-3-4)$$

$$U_4 - U_5 = 0 \qquad (4-5)$$

3. Ersetze Spannungen durch $U = U_0 + R \cdot I$

Hinweis: U_{01}, U_{02} und U_{03} sind hier den Zählpfeilen der jeweiligen Zweige entgegengerichtet und daher negativ einzusetzen!

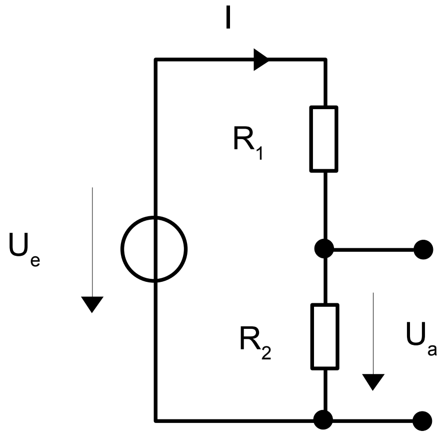
$$-U_{01} + R_1 \cdot \boldsymbol{I_1} - R_2 \cdot \boldsymbol{I_2} = 0 \qquad (1-2)' \qquad (3)$$

$$R_2 \cdot \boldsymbol{I_2} - R_3 \cdot \boldsymbol{I_3} + U_{02} - R_4 \cdot \boldsymbol{I_4} = 0 \qquad (2-3-4)' \qquad (4)$$

$$R_4 \cdot \boldsymbol{I_4} - R_5 \cdot \boldsymbol{I_5} + U_{03} = 0 \qquad (4-5)' \qquad (5)$$

Spannungsteiler, unbelastet

Ein Spannungsteiler teilt eine Eingangspannung U_e auf eine kleinere Ausgangspannung U_a herunter.



Spannungsteiler, unbelastet

Im unbelasteten Fall gilt:

$$U_a = R_2 \cdot I \qquad \text{und} \qquad I = \frac{U_e}{R_1 + R_2}$$

daraus folgt

$$U_a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_e$$

oder

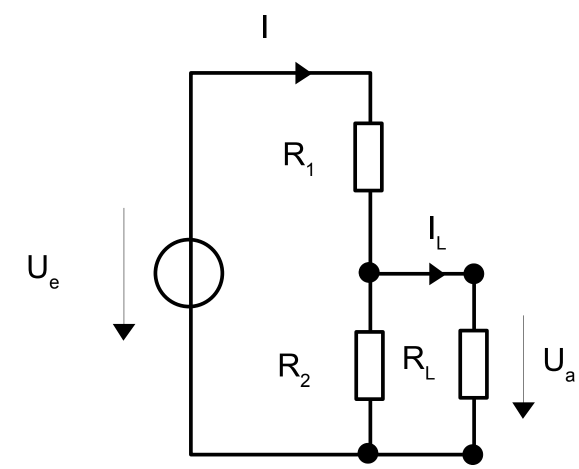
$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Merke: Das Verhältnis der Spannungen entspricht dem Verhältnis der zugehörigen Widerstände.

Spannungsteiler, belastet (I)

Wenn man die geteilte Spannung nutzt, so belastet man den Spannungsteiler mit einem Widerstand R_L.

Durch die Belastung sinkt die Ausgangspannung U_a.
Im belasteten Fall gilt im Prinzip die gleiche Rechnung wie für den unbelasteten Spannungsteiler, wenn man berücksichtigt, dass der Widerstand R_2 durch die Parallelschaltung von R_2 und R_L ersetzt wird.



Spannungsteiler, belastet

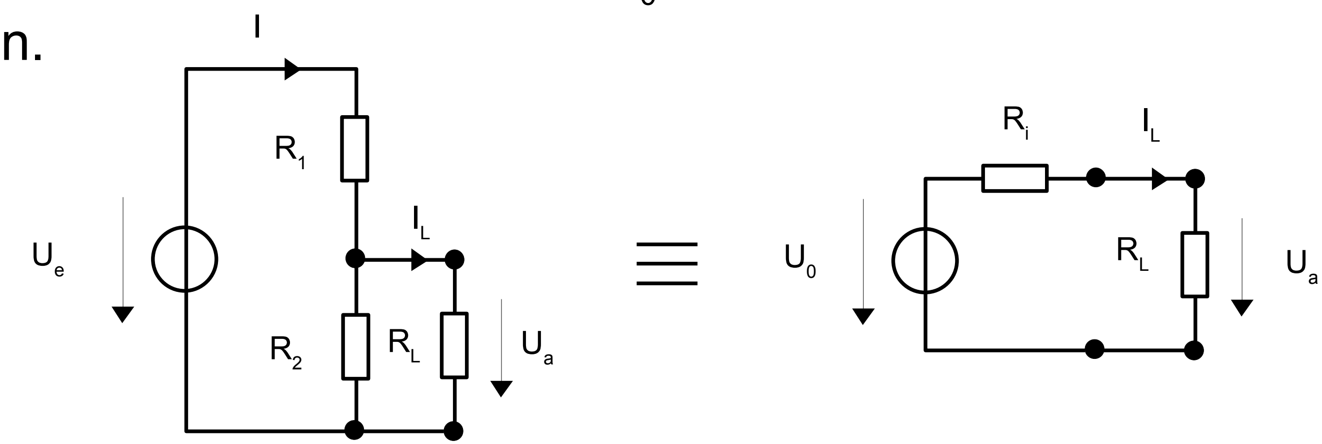
Diese Parallelschaltung hat den Wert $\dfrac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}$

Die Ausgangspannung des belasteten Spannungsteilers errechnet sich daher zu

$$U_a = \frac{\dfrac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}}{R_1 + \dfrac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}} \cdot U_e = \frac{U_e}{\dfrac{R_1 \cdot (R_2 + R_L)}{R_2 \cdot R_L} + 1}$$

Spannungsteiler, belastet (II)

Aus Sicht der Last kann man den Spannungsteiler als **Spannungsquelle** betrachten, welche durch ihre Leerlaufspannung U_0 und ihren Innenwiderstand R_i beschrieben werden kann.



Spannungsteiler, belastet

Spannungsteiler als Quelle

Die Leerlaufspannung U_0 erhält man aus der Gleichung des unbelasteten Spannungsteilers.

$$U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_e$$

Der Kurzschlussstrom ergibt sich aus der Betrachtung des belasteten Spannungsteilers für den Fall, dass $R_L = 0\,\Omega$ gilt. In diesem Fall wird der Strom einzig durch R_1 bestimmt.

$$I_k = \frac{U_e}{R_1}$$

Damit wird der Innenwiderstand des Spannungsteilers zu (Das entspricht der Parallelschaltung von R_1 und R_2!)

$$R_i = \frac{U_0}{I_k} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Dimensionierung von Spannungsteilern

Um einen Spannungsteiler exakt zu dimensionieren, ist die Kenntnis zweier Lastfälle nötig. Daraus ergeben sich zwei Gleichungen für die beiden Teilerwiderstände R_1 und R_2. Eine Faustregel sagt, der Querstrom im Spannungsteiler (Strom durch R_2) sollte etwa 10mal größer sein als der Laststrom I_L.

Mit dieser **Faustregel** ergibt sich folgende Vorgehensweise:

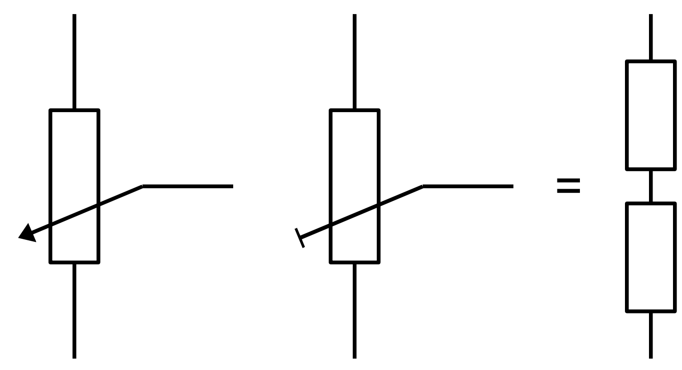
1. Bestimmen des Laststromes aus Lastwiderstand und Ausgangspannung.
2. Bestimmen von R_2 , damit der 10fache Laststrom fließt: $R_2 = 0{,}1\ R_L$
3. R_1 wird so gewählt, dass die Spannungsdifferenz $U_e - U_a$ an R_1 die Summe aus Querstrom und Laststrom fließen lässt.

Die Anwendbarkeit der Faustregel muss im Einzelfall anhand der möglichen Lastfälle überprüft werden.

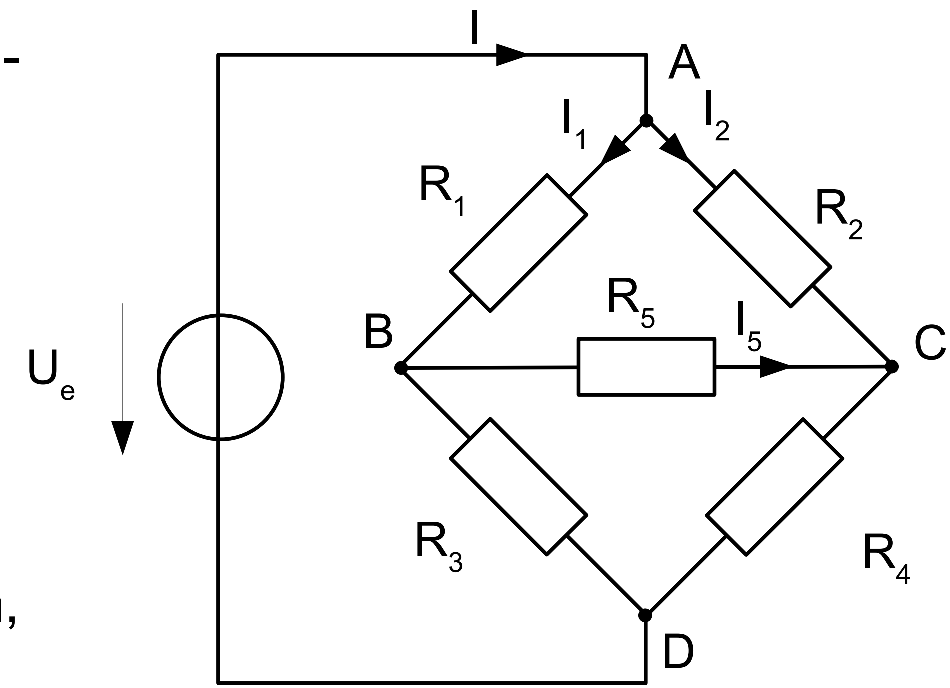
Potentiometer

Einen einstellbaren Spannungsteiler bezeichnet man als „Potentiometer".

Ein Potentiometer besteht aus einer Widerstandsbahn mit einem verstellbaren Abgriff. Der Gesamtwiderstand wird dabei angegeben. Die Aufteilung in R_1 und R_2 wird durch die Schleiferstellung bestimmt.



Brückenschaltung (I)



Die hier gezeigte Anordnung wird als Brückenschaltung bezeichnet.

Man spricht von einer abgeglichenen Brücke, wenn der Strom I_5 zu null wird. In diesem Fall könnte der Widerstand R_5 entfallen.
Man kann dann die Widerstände R_1 und R_3 sowie R_2 und R_4 jeweils als Spannungsteiler betrachten. Damit die Brücke abgeglichen ist, müssen die Potentiale bei B und C gleich sein, d.h. die Ausgangspannung der Spannungsteiler gleich sein.

Daraus folgt die Bedingung für die abgeglichene Brücke:

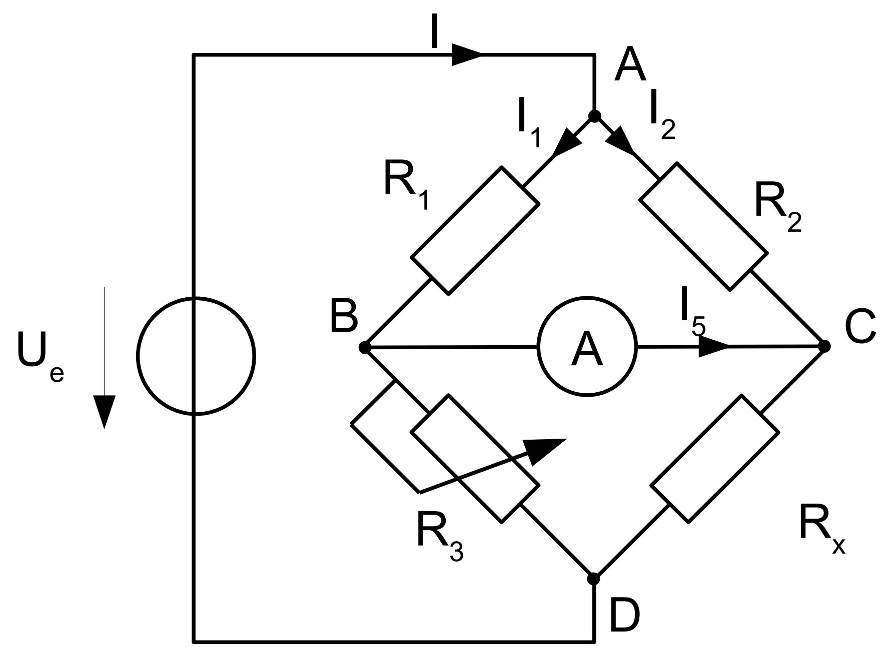
$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \qquad \text{oder auch} \qquad \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

Der abgeglichene Zustand gilt, unabhängig von der Eingangspannung. Es gehen nur die Widerstandsverhältnisse ein.

Brückenschaltung (II)

Die Brückenschaltung wird z.B. zur Messung unbekannter Widerstände eingesetzt. Hierzu wird statt R_5 ein Strommessgerät eingesetzt, um den abgeglichenen Zustand genau zu bestimmen. Der unbekannte Widerstand liegt in einem Brückenzweig, mindestens ein weiterer Brückenwiderstand ist einstellbar (Potentiometer).
An der Potentiometerstellung lässt sich dann der unbekannte Widerstand ablesen (Kompensationsmessung).

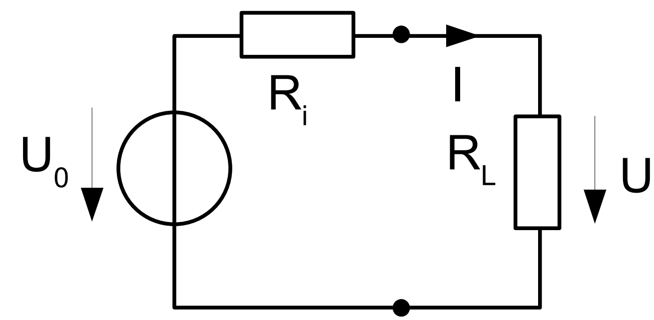
Bei Abgleich gilt: $$R_x = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$



In der Messtechnik (z.B. Dehnungsmessstreifen) nutzt man die Messung der Diagonalspannung zwischen B und C. Dazu wählt man R_5 möglichst hoch. Da das Ergebnis nur von Widerstandsverhältnissen abhängt, lassen sich Temperatureffekte wirksam kompensieren.

Leistungsanpassung

Es soll die Frage beantwortet werden, wie groß die maximale Leistung P_L ist, welche man einer realen Spannungsquelle entnehmen kann.

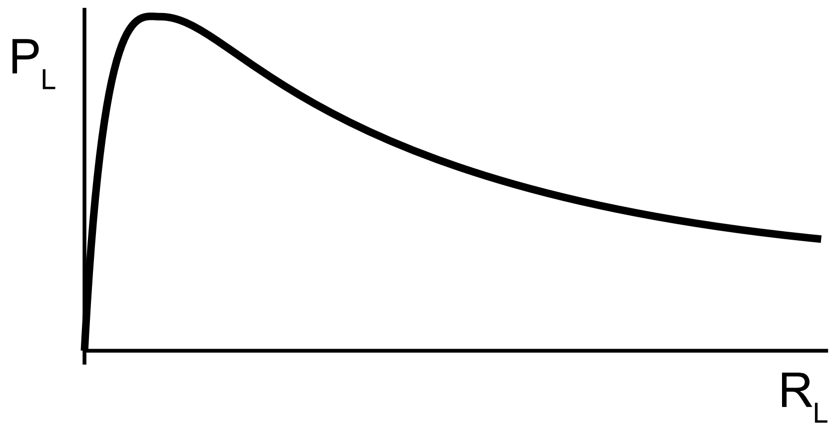


Gesucht wird die Leistung $P_L = U_L \cdot I$ in Abhängigkeit von R_L.
Zunächst die Ränder des Definitionsbereichs:

- $R_L = 0$ => $U_L = 0$ => $P_L = 0$
- $R_L \to \infty$ => $I = 0$ => $P_L = 0$

Dazwischen gilt folgender Zusammenhang:

$$P_L = R_L \cdot I^2 = R_L \cdot \left(\frac{U_0}{R_i + R_L}\right)^2 = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \cdot U_0^2$$



Das Maximum läßt sich durch Bildung der Ableitung finden und liegt bei

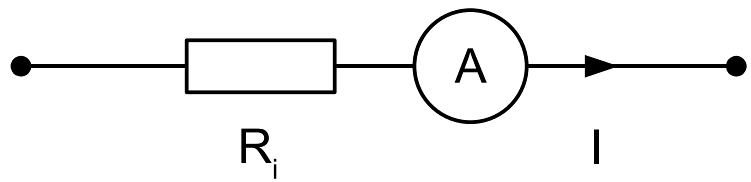
$$R_L = R_i \qquad P_{L,max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}$$

Man spricht dann von Leistungsanpassung.

Messung elektrischer Größen

Bei jeder Messung ist die Beeinflussung der Messgröße durch das Messinstrument zu beachten.

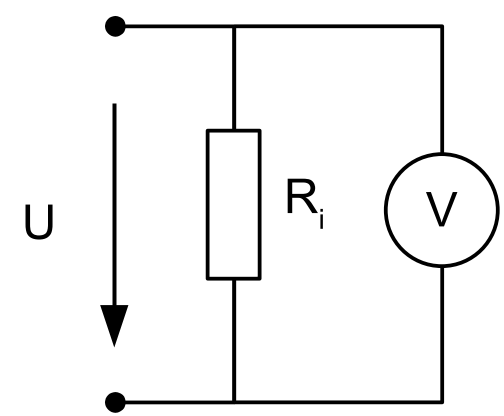
Strommessung:



Ein Strommessgerät (Ampèremeter) wird vom Messstrom I durchflossen. Dabei verändert sein eigener Widerstand R_i die Messgröße. Der Widerstand eines Ampèremeters sollte also möglichst klein im Vergleich zu den anderen Widerständen im Stromkreis sein.
Das ideale Strommessgerät hat einen Widerstand von $R_i = 0\ \Omega$.

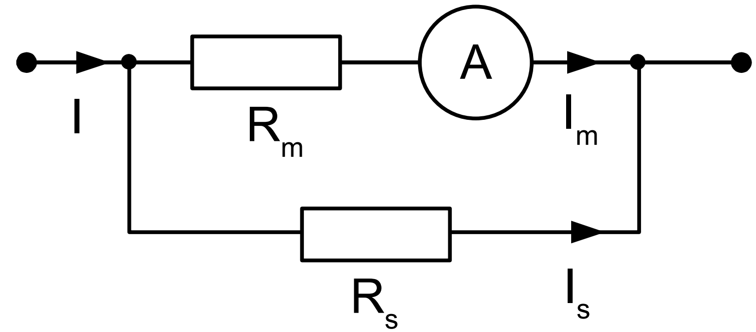
Spannungsmessung:

Ein Spannungsmessgerät (Voltmeter) belastet die zu messende Spannung und verfälscht dadurch den Messwert. Der Widerstand des Messgerätes sollte im Vergleich zum Innenwiderstand der zu messenden Spannungsquelle möglichst groß sein.
Das ideale Spannungsmessgerät hat einen unendlich großen Widerstand ($R_i \to \infty$).



Messbereichserweiterung bei Strommessung

Der Messbereich bei der Strommessung kann mit einem Parallelwiderstand (Shunt) vergrößert werden.

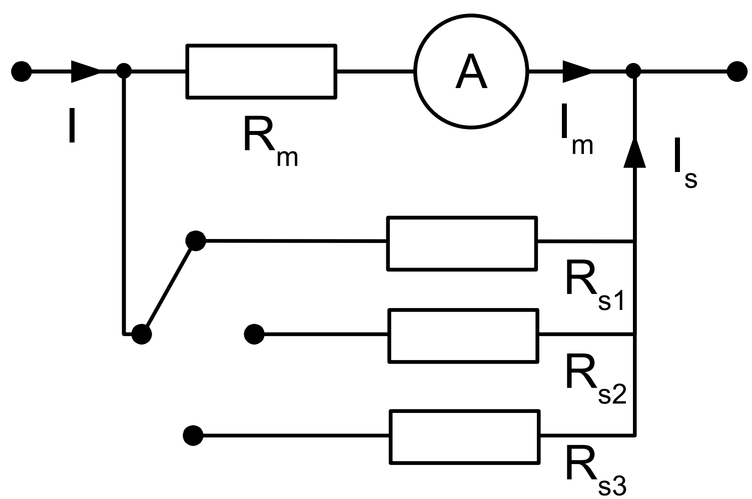


Aus der Knotenregel folgt: $I_m + I_s = I$

Gemäß der Stromteilerregel gilt: $\frac{I_m}{I_s} = \frac{R_s}{R_m}$

Eliminiert man in diesen Gleichungen I_s, so ergibt sich: $I = \left(\frac{R_m}{R_s} + 1\right) \cdot I_m$

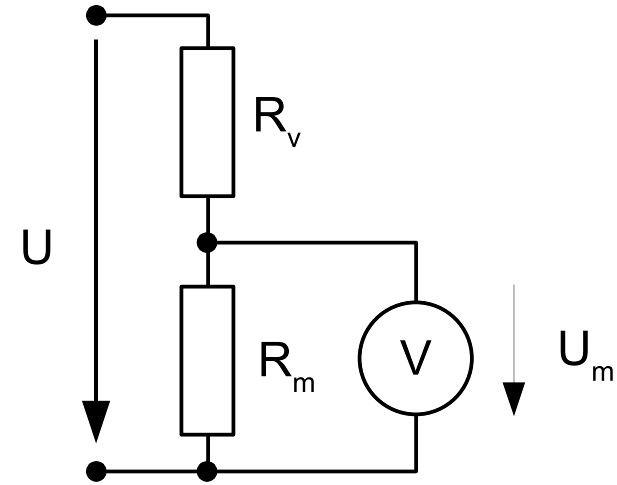
In Messgeräten werden oft unterschiedliche Shunts mit einem Wahlschalter zugeschaltet, um den Messbereich anzupassen.



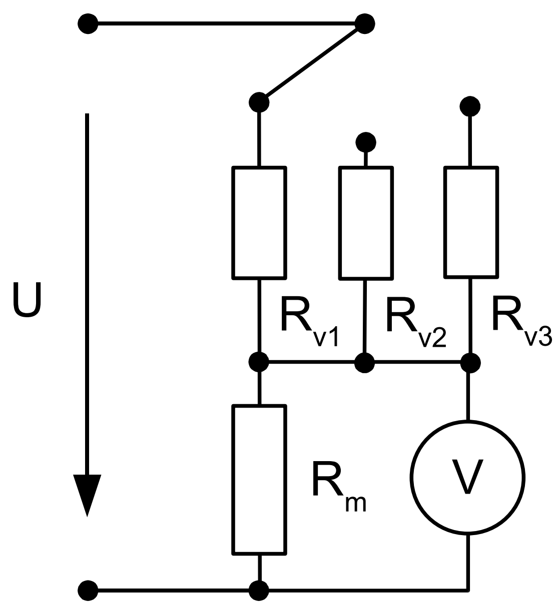
Messbereichserweiterung bei Spannungsmessung

Der Messbereich bei der Spannungsmessung kann mit einem Vorwiderstand vergrößert werden.

Es handelt sich bei dieser Anordnung um einen Spannungsteiler. Die Spannung U errechnet sich aus der angezeigten Spannung U_m zu



$$U = \left(\frac{R_v}{R_m} + 1\right) \cdot U_m$$



Auch hier werden in Messgeräten unterschiedliche Vorwiderstände mit einem Wahlschalter zugeschaltet, um den Messbereich anzupassen.

Nutzleistung und Verlustleistung

Überall, wo elektrischer Strom fließt, wird Leistung umgesetzt.
Die elektrische Leistung *P* bei Gleichstrom ist: $P = U \cdot I$

Diese Leistung wird umgewandelt oder als Energie gespeichert. Ist die Umwandlung der eigentliche Sinn des Gerätes, spricht man von **Nutzleistung**.
Beispiele:

- Elektromotor
- Lampe oder Scheinwerfer
- el. Heizung oder Bügeleisen
- Akku

Die aufgenommene Leistung ist stets größer als die Nutzleistung.
Die Differenz zwischen aufgenommener Leistung und Nutzleistung ist die **Verlust-leistung** und wird in der Regel als Wärme abgegeben.
Der **Wirkungsgrad** η ist das Verhältnis der Nutzleistung zur gesamten aufgenommenen Leistung.

$$\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_{ges}} = \frac{P_{Nutz}}{P_{Nutz} + P_{Verlust}}$$

Der Wirkungsgrad ist eine Zahl zwischen 0 und 1 oder wird in Prozent angegeben (0 .. 100%).

Wärmetransport

Alle elektrischen Bauteile erwärmen sich im Betrieb aufgrund der unvermeidlichen Verlustleistung mehr oder weniger stark. Da die maximale Betriebstemperatur meist begrenzt ist, müssen ggf. Maßnahmen ergriffen werden, diese Wärmeenergie abzuführen.

Für den Wärmetransport gibt es folgende Effekte:

- **Wärmeleitung**
  Materialkonstante: Wärmeleitfähigkeit (Wärmeleitzahl)
- **Wärmestrahlung**
  abhängig von Temperatur und Oberflächenbeschaffenheit
- **Konvektion**
  freie oder erzwungene Konvektion

Um einen Wärmetransport aufrecht zu erhalten, ist ein Temperaturgefälle nötig. Unabhängig von der Art des Wärmetransportes kann man den **thermischen Widerstand** R_{th} definieren, welcher den Temperaturunterschied zur transportierten Wärmeleistung ins Verhältnis setzt.

$$R_{th} = \frac{\Delta \vartheta}{P}$$

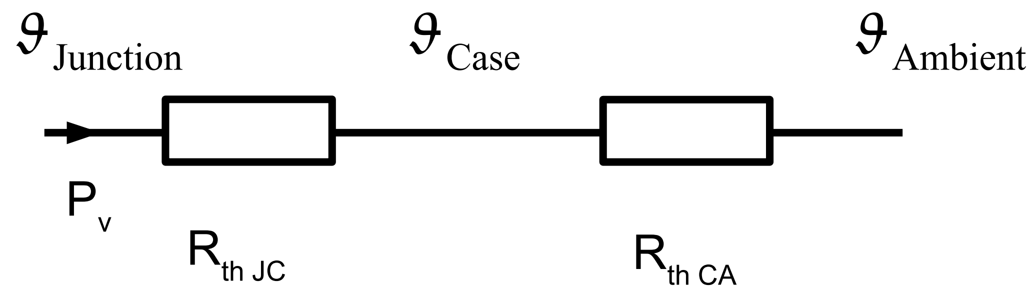
Die Einheit des thermischen Widerstandes ist: $[R_{th}] = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} = \frac{{}^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{W}}$

Kühlung von Bauteilen

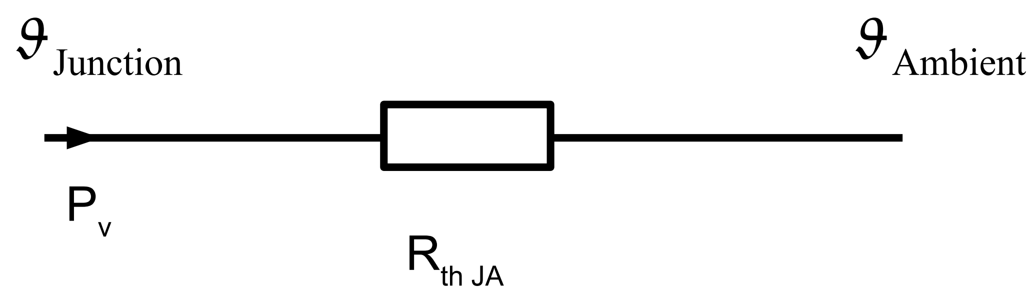
Die Verlustwärme entsteht im Innern der Bauteile, bei Halbleitern an der sogenannten Sperrschicht (engl. „Junction").

Bei kleinen Leistungen reicht zur Kühlung die Wärmeabgabe an die Umgebung (engl. „Ambient") über das Gehäuse (engl. „Case") und die Anschlüsse der Bauteile.

Man kann den Wärmefluß mit **thermischen Widerständen** wie einen Schaltplan skizzieren:



Die beiden thermischen Widerstände lassen sich (wie elektrische Widerstände) zusammenfassen

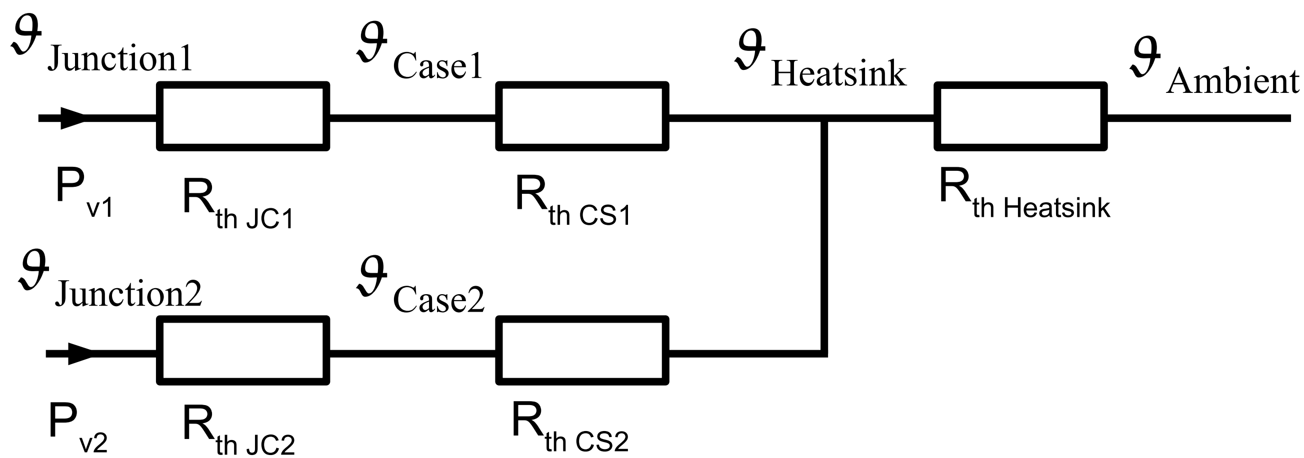


Die Angaben für die thermischen Widerstände und die maximalen Temperaturen können den Datenblättern der Bauteile entnommen werden.
Bei kleinen Leistungen wird oftmals direkt die zulässige Verlustleistung im erlaubten Umgebungstemperaturbereich spezifiziert.

Kühlung mit Kühlkörpern

Im Bereich der Leistungselektronik reicht die Wärmeabgabe über das Gehäuse der Bauteile im allg. nicht aus. Dort werden Kühlkörper eingesetzt. Es können auch mehrere Bauteile an einem gemeinsamen Kühlkörper montiert sein.

Der Wärmefluß bei zwei Bauteilen sieht dann etwa so aus:



In einem solchen Fall muss zunächst die Kühlkörpertemperatur aus der gesamten abzuführenden Leistung berechnet werden.
Ausgehend von der Kühlkörpertemperatur kann dann für jedes Bauteil die Sperrschichttemperatur bestimmt und mit dem Grenzwert verglichen werden.

Die Übergangswiderstände werden durch die Montageart beeinflusst.
Der Kühlkörper hat üblicherweise Rippen, um die Oberfläche zu vergrößern.
Weitere Kühlmöglichkeiten sind:
Lüfter, Flüssigkeitskühlung, Ölbad, Heatpipe, Peltierelement ...

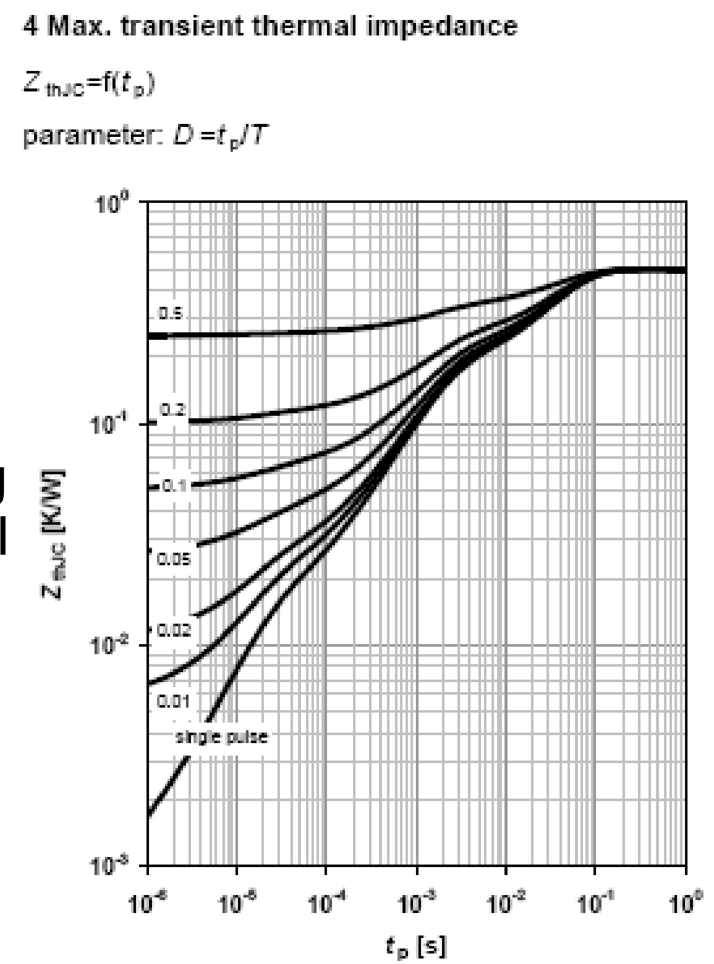
Dauerlast und Pulsbelastung

Die bisherigen Betrachtungen sind von einem gleichmäßigen Wärmestrom ausgegangen. Dabei stellen sich konstante Temperaturverhältnisse ein.

Die beteiligten Körper haben jedoch auch eine mehr oder weniger ausgeprägte Wärmespeicherfähigkeit (Wärmekapazität). Daher können kurzzeitige Verlustleistungen auch bei geringeren Temperaturerhöhungen aufgenommen werden.

Es ist daher bei vielen Bauteilen neben der zulässigen Dauerbelastung auch eine Pulsbelastung spezifiziert. Hieraus kann man entnehmen, wieviel Verlustleistung unter Einhalten eines bestimmten Puls-/Pausen-Verhältnisses abgeführt werden kann.

Die gleichen Überlegungen lassen sich auch für Kühlkörpersysteme anstellen.



Beispiel für Pulsbelastung

Elektrisches Feld: elektrische Feldstärke E

Wir kennen die Definition der elektrischen Feldstärke E über die Kraftwirkung auf eine Probeladung:

$$E = \frac{F}{Q}$$

Entlang einer elektrischen Feldlinie verändert sich das Potential. Die Änderung des Potentials pro Wegstrecke ist ebenfalls ein Maß für die elektrische Feldstärke. Potentialunterschiede sind Spannungen. Daher ist die elektrische Feldstärke auch als „Spannung pro Wegstrecke“ beschreibbar.

$$E = \frac{U}{l} \qquad [E] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Auf dieser Beschreibung basiert die übliche Einheit der elektrischen Feldstärke.

Elektrisches Feld: elektrische Flussdichte D

Unterschiedliche Ladungen im Raum sind die Ursache des statischen elektrischen Feldes. Die Frage lautet, ob man auch umgekehrt aus der Kenntnis des Feldes auf die Anordnung der Ladungen schließen kann.
Hierzu betrachtet man nicht die elektrische Feldstärke E sondern führt eine weitere Feldgröße, die elektrische Flussdichte D ein.
An jedem Punkt des Raumes ist der Vektor D proportional zu E.

$$\vec{D} \sim \vec{E} \qquad\qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Betrachtet man eine beliebige geschlossene Hülle im Raum und integriert die Flussdichte über diese gesamte Hülle, so ergibt sich die von der Hülle eingeschlossene Ladung.

$$Q = \oint \vec{D} \; d\vec{A}$$

Das D-Feld ist eine andere Beschreibung der Ladungsverteilung im Raum. Die Einheit der elektrischen Flussdichte ist

$$[D] = \frac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$$

Die Proportionalitätskonstante ε ist die materialabhängige **Dielektrizitätskonstante** oder **Permittivität**.
Im Vakuum ist

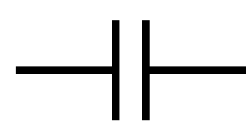
$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

Der Kondensator als Energiespeicher

Bringt man unterschiedliche Ladungen auf zwei leitfähige Elektroden, so bildet sich dazwischen ein elektrisches Feld. Die zur Trennung der Ladungen nötige Arbeit wird als Energie in diesem Feld gespeichert und bleibt dort, solange die Elektroden elektrisch voneinander isoliert sind.
Eine solche Anordnung zweier isolierter Elektroden nennt man **Kondensator** .
Die Elektroden eines geladenen Kondensators haben unterschiedliches Potential.
Es liegt also eine Spannung zwischen ihnen. Die Spannung ist umso höher, je mehr Ladung die Elektroden aufgenommen haben.

Eine leicht zu berechnende Elektrodenanordnung ist der Plattenkondensator:
Zwei im Abstand *d* voneinander angebrachte Metallplatten der Fläche *A*.

An diese Anordnung erinnert das Schaltzeichen des Kondensators.



Zwischen den Platten eines solchen Plattenkondensators bildet sich ein annähernd homogenes elektrisches Feld:
Die Feldstärke ist überall zwischen den Platten gleich groß. Außerhalb des Plattenzwischenraums ist die Feldstärke null.

Die Kapazität eines Kondensators

Am Beispiel des Plattenkondensators soll der Zusammenhang zwischen Ladungsmenge Q und Spannung U ermittelt werden:
Im homogenen elektrischen Feld ist die Feldstärke

$$E = \frac{U}{d} \qquad (1)$$

Zur Berechnung der Ladungsmenge auf einer Kondensatorplatte bestimmt man das Flächenintegral der Flussdichte über eine geschlossene Hülle. Im homogenen Feld zwischen den Platten trägt nur der (konstante) Feldanteil zwischen den Platten zum Integral bei:

$$Q = A \cdot D = A \cdot \varepsilon \cdot E \quad \text{oder} \quad E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A} \qquad (2)$$

Durch Gleichsetzen der Formeln (1) und (2) ergibt sich der gesuchte Zusammenhang:

$$\frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A} \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

Die Ladung ist also zur Spannung proportional. Dies gilt für **alle** Kondensatoren. Die Proportionalitätskonstante nennt man **Kapazität C**.

$$C = \frac{Q}{U} \qquad [C] = \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F} \qquad \text{1 Farad}$$

Gebräuchliche Einheiten sind µF, nF und pF.

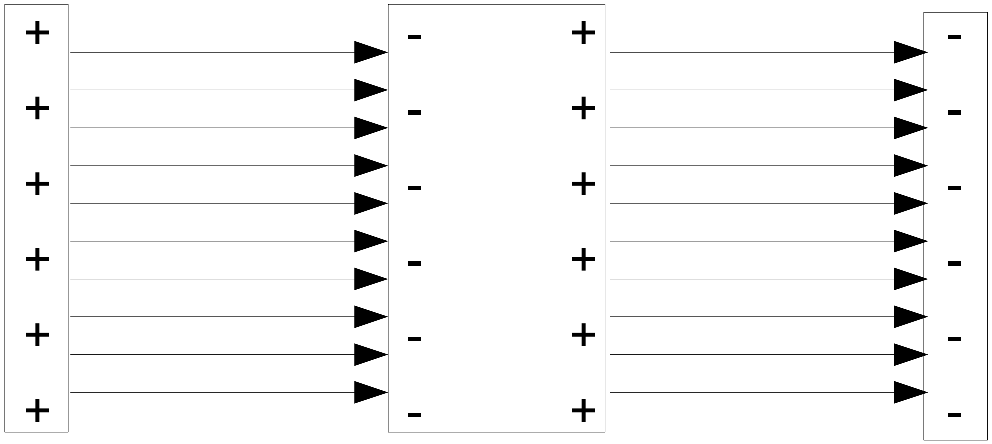
Das Beispiel liefert gleich die Formel für die Kapazität eines Plattenkondensators:

$$C_{Plattenkondensator} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

Materie im elektrischen Feld: elektrische Leiter

In einem elektrischen Leiter sind frei bewegliche Ladungsträger in ausreichender Menge vorhanden. Bringt man einen solchen Leiter in ein elektrisches Feld, so werden die Ladungsträger zu den Enden des Leiters verschoben.
Diese Ladungsverschiebung nennt man **Influenz**.

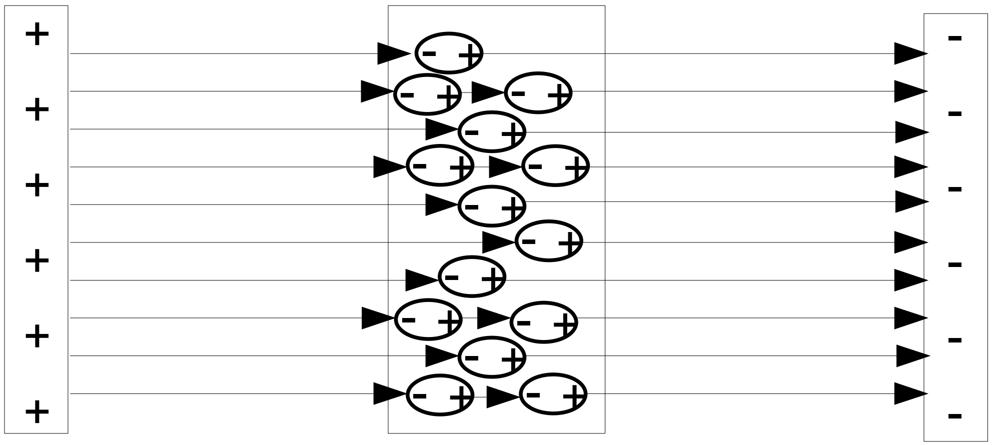
Im Innern des Leiters ist die Feldstärke null. Die Feldlinien werden um die Leiterlänge verkürzt.



Materie im elektrischen Feld: Isolator

In einem Isolator lassen sich die geladenen Atomteilchen nicht frei bewegen. Jedoch wirkt auch hier die Influenz auf jedes einzelne Atom oder Molekül.
Die Atome und Moleküle werden zu elektrischen **Dipolen**.

Die Dipolbildung ist die Erklärung für die Materialabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante oder Permittivität ε. Aufgrund der Dipole werden die elektrischen Feldlinien praktisch verkürzt. Im Innern des Isolators verringert sich die elektrische Feldstärke. Das Ausmaß dieses Effektes ist eine Materialkonstante.



Materie im elektrischen Feld: relative Permittivität

Die Permittivität ε wird aufgeteilt: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ $\qquad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

mit ε_0 als Dielektrizitätskonstante des Vakuums und
ε_r als relative Dielektrizitätskonstante, relative Permittivität oder relative Permittivitätszahl

hier einige Beispiele für ε_r:

Material	ε_r	**Material**	ε_r
Vakuum	1	Polyethylen (PE) (90 °C)	2,4
Luft	1,00059	Polypropylen (PP) (90 °C)	2,1
Acrylbutadienstyrol (ABS) (30 °C)	4,3	Porzellan	2 – 6
Trockene Erde	3,9	Paraffin	2,28
Feuchte Erde	29	Papier	1 – 4
Glas	6 – 8	Polytetrafluorethylen (PTFE, Teflon)	2
Gummi	2,5 – 3	Pertinax FR4	4,4
trockenes Holz	2 – 3,5	Polystyrol-Schaum (Styropor ® BASF)	1,03
spezielle Keramik	bis 10000	Tantalpentoxid	27

Strom und Spannung am Kondensator

Für Gleichstrom ist ein Kondensator ein unendlich hoher Widerstand.
Während des Lade- oder Entladevorgangs fließt jedoch auch ein Strom *i* durch den Kondensator.
Die Ladungsmenge entspricht der Integration des Stromes über die Zeit:

$$Q=\int i\,\mathrm{d}t$$

Über die Definition der Kapazität *C* ist die Ladung *Q* mit der Spannung *U* verknüpft:

$$C=\frac{Q}{U} \quad \text{bzw.} \quad U=\frac{Q}{C}$$

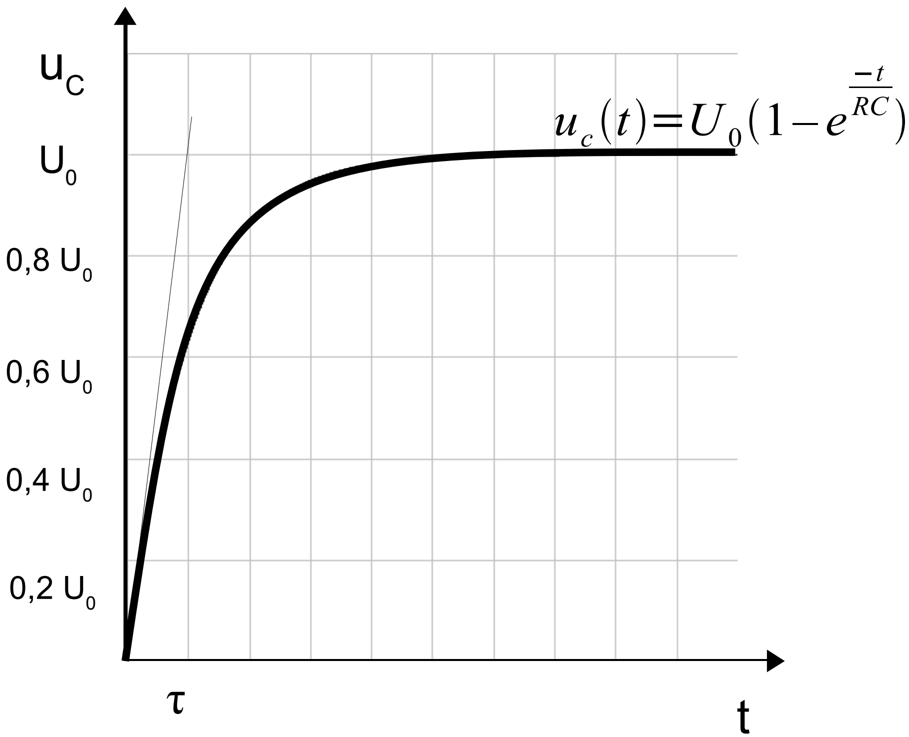
Für den Spannungsverlauf am Kondensator gilt daher: $u(t)=\frac{1}{C}\cdot\int i(t)\,\mathrm{d}t$

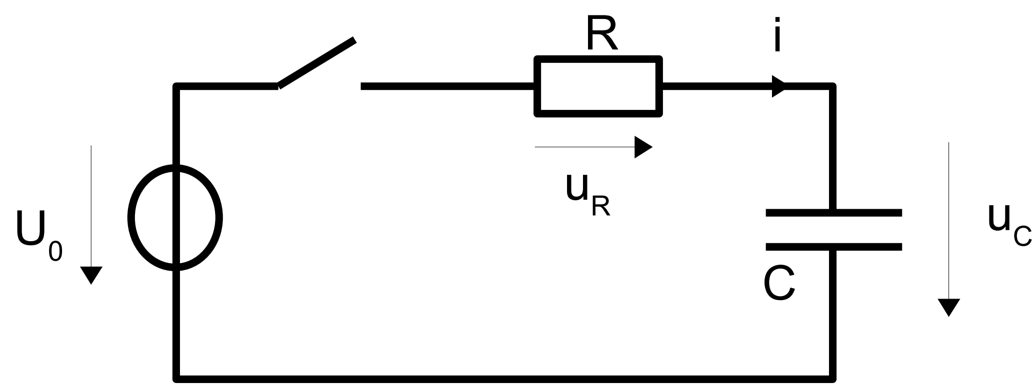
Oder in der Differentialform: $i(t)=C\cdot\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ $\quad i(t)=C\cdot\dot{u}(t)$

Der Kondensatorstrom ist proportional zur zeitlichen Änderung der Kondensatorspannung und zur Kapazität C.

Ausgleichsvorgänge am Kondensator

Der Spannungsverlauf u_C am Kondensator nach dem Schließen des Schalters entspricht der unten angegebenen Funktion.





- Das Produkt τ = *RC* nennt man Zeitkonstante.
- τ hat die Einheit einer Zeit ([τ] = s).
- Nach der Zeit τ hat die Spannung ca. 63% ihres Endwertes erreicht.

Ausgleichsvorgänge am Kondensator, allgemeiner Fall

Im allgemeinen Fall ist die Spannung am Kondensator zum Zeitpunkt t = 0 nicht null.

Es sei U_a die Anfangsspannung am Kondensator.
Die Spannung, welche sich nach dem Ausgleichsvorgang am Kondensator einstellt sei U_e (Endwert).

Die Kondensatorspannung $u_c(t)$ folgt dann der Funktion

$$u_C(t) = U_a + (U_e - U_a)\cdot(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

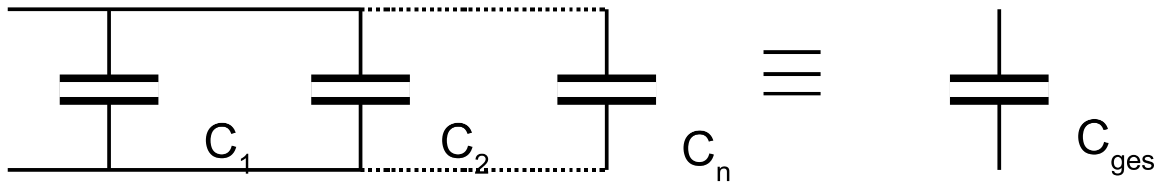
mit der Zeitkonstante $\tau = R\cdot C$

Zur Überprüfung der Funktion seien nur die Grenzen für *t* eingesetzt.
Es ergeben sich die geforderten Werte U_a und U_e.

$$u_C(0) = U_a + (U_e - U_a)\cdot(1 - e^0) = U_a$$

$$\lim_{t\to\infty} u_C(t) = U_a + (U_e - U_a) = U_e$$

Parallelschaltung von Kondensatoren

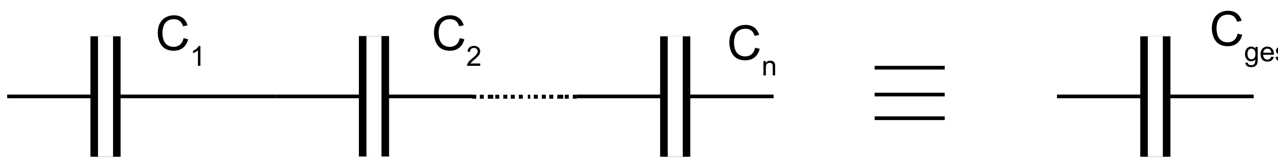


Schaltet man mehrere Kondensatoren parallel, so entspricht dies einer Addition der Plattenflächen A. Daher gilt für die für die Gesamtkapazität der Parallelschaltung:

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Die Kapazität von parallel geschalteten Kondensatoren ist die Summe der Einzelkapazitäten.

Reihenschaltung von Kondensatoren



Schaltet man Kondensatoren in Reihe, so entspricht dies einer Vergrößerung des Plattenabstandes d. Für die Gesamtkapazität der Reihenschaltung gilt:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Bei der Reihenschaltung von Kondensatoren ist der Kehrwert der Gesamtkapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten.

Bauformen von Kondensatoren

Folienkondensatoren

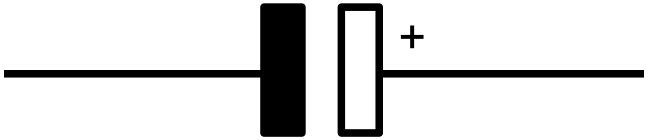
Gewickelte oder gestapelte Lagen von Metall- und Isolationsschichten.
Metallschichten ggf. auf Isolator aufgedampft (Selbstheilungseffekt).

Keramische Kondensatoren

Metallschichten auf keramischem Dielektrikum.
(Hohe Frequenzen, hohe Spannungen, kleine Kapazität)

Elektrolytkondensatoren (Elko)

Aluminium- oder Tantalelko
Oxidschicht als Dielektrikum zwischen Metall und Elektrolyt
Gepolt, d.h. Spannung darf nur in einer Richtung anliegen !



Doppelschichtkondensatoren

Wenige Moleküllagen eines Elektrolyten als Dielektrikum
höchste Kapazitätswerte (mehrere Farad)
geringe Spannungsfestigkeit
Gepolt

Sonderformen: Drehkondensator, Kapazitätsdiode ...

Kenngrößen von Kondensatoren

Neben der **Kapazität** als der wesentlichen Eigenschaft eines Kondensators sind weitere Kenngrößen für seinen Einsatz in der Elektrotechnik und Elektronik relevant:

Spannungsfestigkeit
Gibt an, bis zu welcher Spannung der Kondensator aufgeladen werden darf.

Serienwiderstand (ESR, equivalent series resistance)
In der Praxis sind die äußeren und inneren Zuleitungen nicht widerstandslos. Der Serienwiderstand begrenzt den Spitzenstrom durch den Kondensator.

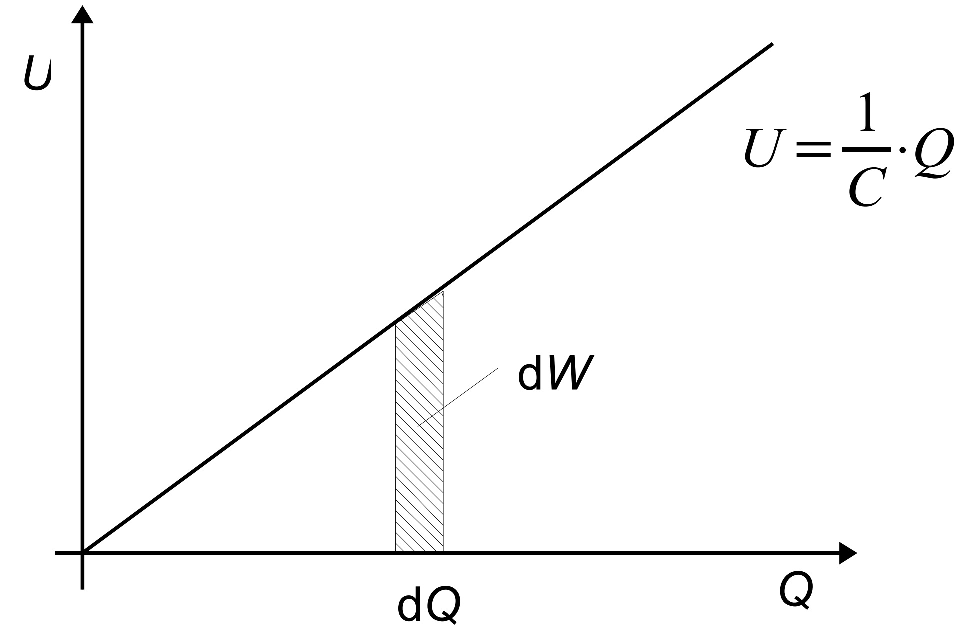
Isolationswiderstand
Ein geladener Kondensator entlädt sich über seinen nicht unendlich hohen Isolationswiderstand nach einiger Zeit von selbst.

Serieninduktivität (ESL, equivalent series inductance)
Die Zuleitungen besitzen auch eine Induktivität.

Zu beachten ist außerdem die Frequenzabhängigkeit der verschiedenen Größen, die Temperaturabhängigkeit und die Alterung.

Energieinhalt eines geladenen Kondensators

Im elektrischen Feld eines geladenen Kondensators ist Energie gespeichert. Wir betrachten den Zusammenhang zwischen Spannung *U* und Ladung *Q*:



Bringt man bei einer Spannung *U* eine kleine Zusatzladung d*Q* auf den Kondensator, so wird die zusätzliche Arbeit d*W* gespeichert.

$$\mathrm{d}W = U \cdot \mathrm{d}Q$$

U ist selbst eine Funktion der Ladung: $U = \frac{1}{C} \cdot Q$

Die gesamte Energie ergibt sich durch Integration der einzelnen „Arbeitshäppchen“

$$W_C = \int_0^{Q_C} \mathrm{d}W = \int_0^{Q_C} \frac{1}{C} \cdot Q \,\mathrm{d}Q = \frac{Q_C^2}{2C}$$

mit $Q_C = C \cdot U_C$ folgt $W_C = \frac{1}{2} C U_C^2$

Magnetismus und Elektrotechnik

- Magnetische Eigenschaften bestimmter Mineralien (Magnetit) sind seit dem Altertum bekannt (z.B. China, bereits im 11. Jahrhundert v. Chr. oder Griechenland).
  $\Rightarrow$ Dauermagnet, Permanentmagnet
- Anwendung Kompass: ein drehbarer gelagerter Magnet richtet sich in Nord - Südrichtung aus. Die Seite, welche zum geographischen Nordpol zeigt, nennt man den „Nordpol“ des Magneten, die andere „Südpol“.
- Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an
  $\Rightarrow$ am geographischen Nordpol ist ein magnetischer Südpol.
- Hans Christian Ørsted entdeckte, dass ein stromdurchflossener Leiter eine Kompassnadel ablenkt (ca 1820).
- André Marie Ampère sah den Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen und postulierte, dass alle magnetischen Effekte auf elektrische Ursachen zurückzuführen sind.
- Eine stromdurchflossene Spule verhält sich wie ein Dauermagnet.

Das magnetische Feld

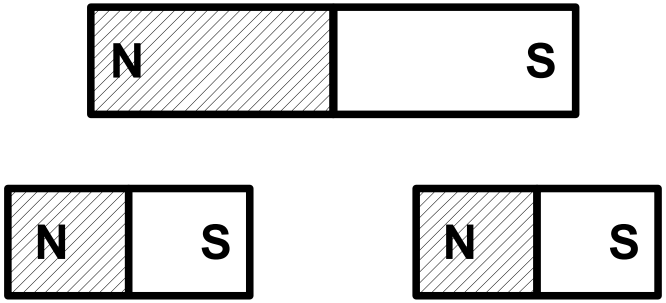
Die magnetischen Erscheinungen werden durch ein magnetisches Feld beschrieben. Der Vergleich des magnetischen Feldes mit dem elektrischen Feld zeigt Ähnlichkeiten, aber auch Unterschiede:

- Das elektrische Feld wird von **Ladungen** hervorgerufen.
  Das Magnetfeld wird von **bewegten Ladungen** hervorgerufen.

- Das elektrische Feld übt eine **Kraft auf Ladungen** aus.
  Das magnetische Feld übt eine **Kraft auf bewegte Ladungen** aus.

- Die elektrischen Feldlinien **beginnen** an positiven Ladungen **und enden** an negativen.
  Magnetische Feldlinien sind in sich geschlossene Kurven **ohne Anfang und Ende.** Die Feldlinienrichtung ist außerhalb des Magneten vom Nord- zum Südpol, im Innern umgekehrt.

- Elektrische **Ladungen lassen sich trennen**.
  Es sind **keine magnetischen Monopole** bekannt (Trennt man einen Magneten zwischen Nord- und Südpol, so entstehen zwei neue Magnete mit jeweils einem eigenen Nord- und Südpol).

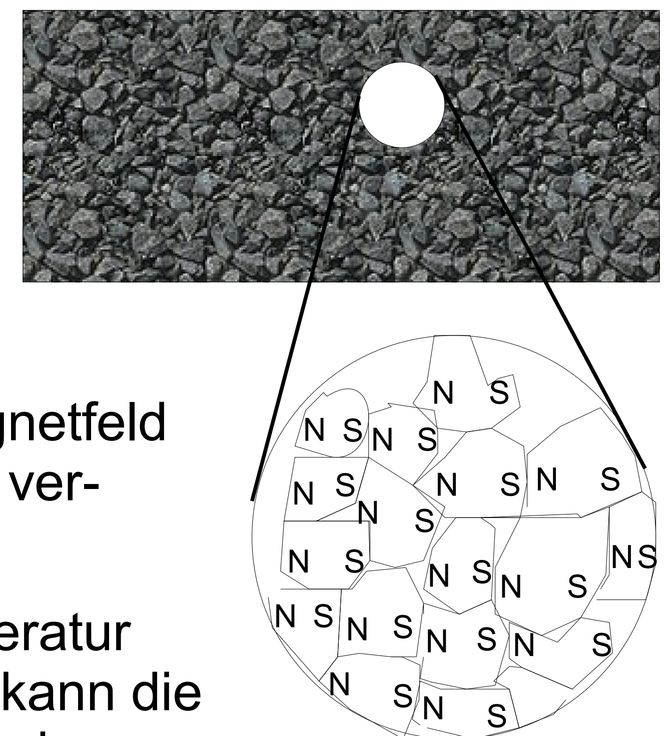


Weiss'sche Bezirke

Die permanentmagnetischen Eigenschaften bestimmter Stoffe lassen sich auf bewegte Ladungen zurückführen:

Die um den Atomkern kreisenden Elektronen sowie ihr eigener Drehsinn (Spin) sind nichts anderes als bewegte Ladungen. In „normaler“ Materie heben sich die unregelmäßig angeordneten Bahnkurven in ihren magnetischen Wirkungen auf.

Im Innern eines Dauermagneten gibt es Bereiche, sogenannte **Weiss'sche Bezirke** (nach dem franz. Physiker Pierre Ernest Weiss), in denen die Ladungsbewegung aufgrund der Kristallstruktur zueinander ausgerichtet ist. Diese Weiss'schen Bezirke bilden die „Elementarmagnete“ (ca. 10^{-6} .. 10^{-8} m, 10^{6} .. 10^{9} Atome).



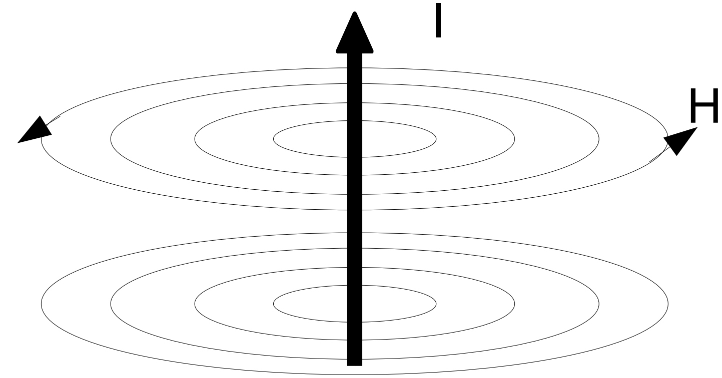
Werden die Weiss'schen Bezirke durch ein äußeres Magnetfeld ebenfalls ausgerichtet, so können sie in diesem Zustand verbleiben und der Körper ist nach außen magnetisch.

Durch Erhitzen über die materialspezifische Curie-Temperatur oder durch ein abklingendes magnetisches Wechselfeld kann die Magnetisierung wieder aufgehoben werden. Die Weiss' schen Bezirke selbst bleiben jedoch erhalten.

Magnetische Feldstärke *H*

Die magnetische Feldstärke *H* ist eine vektorielle Größe und zeigt in Richtung der Feldlinien.

Beispiel: stromdurchflossener Leiter:



Die Feldstärke *H* ist proportional zum Strom *I* und nimmt mit zunehmendem Abstand *r* vom Leiter ab. Es gilt:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{oder} \quad H(r) \cdot 2\pi r = I$$

Der Ausdruck $2\pi r = l$ entspricht der Länge einer Feldlinie.

Rechte Hand:
Daumen in Stromrichtung ⇒ Finger zeigen in Feldrichtung

Ganz allgemein gilt das **Durchflutungsgesetz**:

$$\oint H\, dl = \int J\, dA$$

Das Umlaufintegral entlang einer beliebigen geschlossenen Linie über die Feldstärke *H* ergibt die Summe des Stromes durch die von der Linie eingeschlossene Fläche. Die Einheit der magnetischen Feldstärke ist gemäß dieser Formel:

$$[H] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

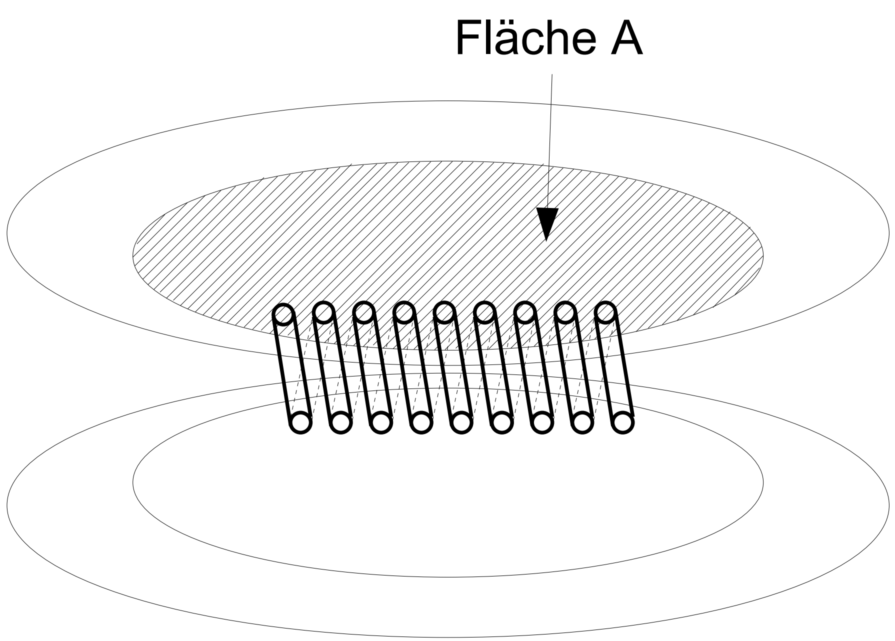
Durchflutung Θ

Den Ausdruck $$\Theta = \int J \, dA$$

aus dem Durchflutungsgesetz nennt man die **elektrische Durchflutung**.

Die Durchflutung ist die Summe aller Ströme durch eine bestimmte Fläche.
Die Einheit der Durchflutung entspricht der des Stromes.

$$[\Theta] = \mathrm{A}$$



Die Durchflutung spielt bei Spulen eine Rolle, da durch die Windungszahl *n* der fließende Strom *I* quasi vervielfacht wird.
Aus diesem Grund verwendet man als „Einheit“ der Durchflutung oft den Begriff „Ampere-Windungen“.
Für die Rechnung ist diese Einheit mit Ampere gleichzusetzen.

Die Durchflutung einer Spule errechnet sich aus der Windungszahl und dem Spulenstrom zu

$$\Theta = n \cdot I$$

Magnetische Flussdichte *B*

Wie beim elektrischen Feld gibt es auch beim magnetischen Feld eine weitere Feldgröße, welche sich nur durch einen materialabhängigen Faktor von der Feldstärke unterscheidet.

Beim Magnetfeld handelt es sich um die **magnetische Flussdichte *B*,** ebenfalls eine vektorielle Größe.

Es gilt:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Die Einheit von *B* ist:

$$[B] = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} = T$$

Tesla, nach Nicola Tesla

Die veraltete Einheit „Gauss“ sollte nicht mehr verwendet werden (1 G = 10^{-4} T).

μ nennt man die **Permeabilität** eines Stoffes. Wie bei *ε* wird auch *μ* aufgeteilt in die Naturkonstante μ_0 und die relative Permeabilität μ_r als Materialkonstante.

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$$

Die magnetische Flussdichte *B* ist für die Kraftwirkung auf Magnete und bewegte Ladungen verantwortlich.

Magnetischer Fluss Φ

Der **magnetische Fluss Φ** ist eine skalare Größe.

Er errechnet sich aus dem Flächenintegral der Flussdichte über eine bestimmte Fläche.

$$\Phi = \int B\, dA$$

Die Einheit von Φ ist: $[\Phi] = \mathrm{V\,s} = Wb$ Weber, nach Wilhelm Eduard Weber

Da es keine magnetische Monopole gibt, ist der Fluss durch eine geschlossene Hülle immer gleich 0.

Kraftwirkung des Magnetfeldes auf einen stromdurchflossenen Leiter

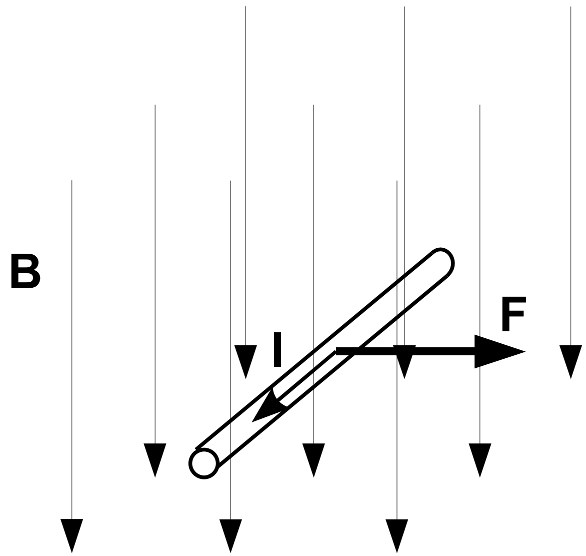
Magnetfelder werden von bewegten Ladungen erzeugt und wirken auf bewegte Ladungen mit einer Kraft.

Verantwortlich für die Kraftwirkung ist die magnetische Flussdichte.

Betrachtet man die bewegten Ladungen in einem stromdurchflossenen Leiter, so wirkt auf diesen im Magnetfeld eine Kraft.

Die Kraft *F* wächst mit der Stromstärke *I*, der magnetischen Flussdichte *B* und der Länge *l* des Leiters innerhalb des Magnetfeldes.
Es gilt:

$$F = B \cdot I \cdot l$$



Zur Bestimmung der Kraftrichtung kann wieder die **rechte Hand** zuhilfe genommen werden:

- Daumen zeigt in Stromrichtung
- Zeigefinger in Feldrichtung
- Mittelfinger in Kraftrichtung

Kraftwirkung des Magnetfeldes auf eine bewegte Ladung

Die Kraftwirkung des Magnetfeldes auf einen stromdurchflossenen Leiter ist eine Folge der Kraftwirkung auf bewegte Ladungen:

Die Ladung *Q* bewege sich mit der Geschwindigkeit *v* senkrecht zu den magnetischen Feldlinien der Flussdichte *B*.

mit $I = \frac{Q}{t}$ wird $F = B \cdot I \cdot l$ zu $F = \frac{B \cdot Q \cdot l}{t} = Q \cdot v \cdot B$

Wenn *v* senkrecht zu *B* ist, so gilt für die Kraftrichtung wieder die „Rechte Hand Regel“: (Daumen = *v*; Zeigefinger = *B*; Mittelfinger = *F*)
In vektorieller Schreibweise wird dieser Zusammenhang mit dem Kreuzprodukt dargestellt

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{(Lorentzkraft)}$$

Mit dem Winkel *φ* zwischen *v* und *B* wird das Kreuzprodukt zu

$$\left|\vec{F}\right| = Q \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \sin\varphi$$

Anwendungen der Kraftwirkungen

Die Kraftwirkung des Magnetfeldes auf stromdurchflossene Leiter findet praktische Anwendung z.B. in

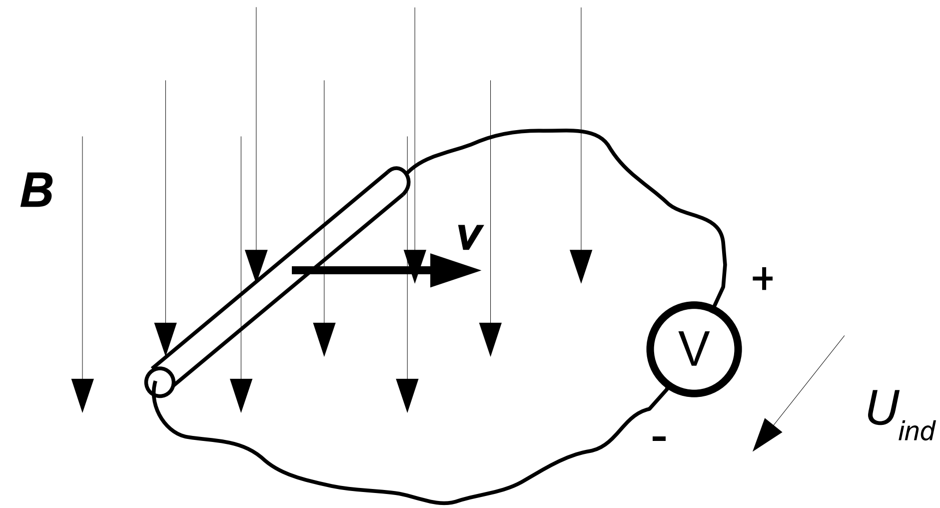
- Elektromotoren
- Lautsprecher (Tauchspulantrieb)
- Drehspulmessinstrument
- ...

Die Kraftwirkung auf bewegte Ladungen wird genutzt bei:

- Fernsehröhre
- Hall-Effekt
- Feldplatte
- Teilchenbeschleuniger
- ...

Induktionsgesetz (allgemein)

Bewegt man einen Leiter durch ein Magnetfeld, so wirkt auf die in ihm enthaltenen Ladungsträger die Lorentzkraft. Die Ladungsträger bewegen sich zu den Enden des Leiters. Es baut sich eine elektrische Spannung auf. Man spricht von der **induzierten Spannung** U_{ind}.



Induktionsgesetz:
Die Änderung des magnetischen Flusses durch eine umgrenzte Fläche erzeugt ein elektrisches Feld entlang der Umrandung der Fläche. Das elektrische Feld ist so gerichtet, dass es der Ursache entgegenwirkt (Lenz'sche Regel).

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}$$

Induktionsgesetz und Spulen

Das allgemeine Induktionsgesetz

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\,s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int \vec{B}\,\mathrm{d}\,\vec{A}$$

lässt sich im Falle der Leiterschleife wie folgt interpretieren:

Die linke Seite der Gleichung ist die in der **Leiterschleife** induzierte Spannung U_{ind}. Auf der rechten Seite steht die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses.

$$U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

Bei einer **Spule** mit *n* Windungen multipliziert sich die Spannung noch mit der Windungszahl *n*.

$$U_{Spule} = -n\cdot\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

Für die Änderung des magn. Flusses kann es verschiedene Ursachen geben:

- Änderung der wirksamen Fläche (Bewegung, Drehung)
- Änderung der magnetischen Flussdichte (Feldstärke, Geometrie, Permeabilität)

Das Induktionsgesetz findet z.B. Anwendung bei:

- Generator
- Transformator
- dynamisches Mikrofon
- Tonbandwiedergabe (Tonkopf)
- Elektrogitarre (Tonabnehmer)
- ...

Selbstinduktion

Das Induktionsgesetz gilt auch dann, wenn der magnetische Fluss durch die Leiterschleife von einem Strom durch die Leiterschleife selbst hervorgerufen wird. In diesem Fall spricht man von **Selbstinduktion**.
Da nur die Änderung des magnetischen Flusses eine Spannung induziert, reagiert eine Leiterschleife auf Änderungen des sie durchfließenden Stromes mit einer induzierten Spannung *U*.
Diese Spannung ist so gerichtet, dass sie versucht, der Stromänderung entgegenzuwirken (Lenz'sche Regel).
Der Betrag der Spannung ist der Flussänderung proportional, der magnetische Fluss ist wiederum proportional zum Strom *I* durch die Leiterschleife:

$$U \sim \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{und} \qquad \Phi \sim I$$

Daher ist die Spannung an der Leiterschleife proportional zur Änderung des sie durchfließenden Stromes.

$$U \sim \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Die Proportionalitätskonstante nennt man **Induktivität *L***:

$$U = L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L \cdot \dot{I}$$

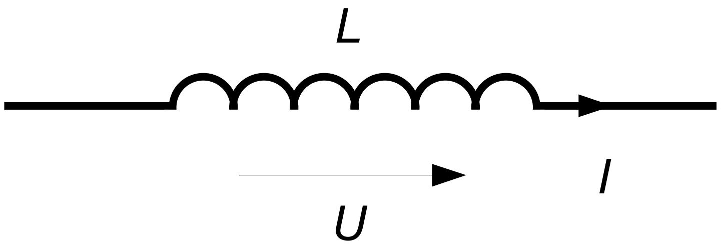
Die Einheit der Induktivität ist:

$$[L] = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H} \qquad \text{(Henry)}$$

Die Spule als elektrisches Bauelement

Jede Anordnung in der ein Strom fließen kann, besitzt eine Induktivität, da es sich um eine Leiterschleife (Stromkreis) handeln muss.
Das elektrische Bauelement, welches als Haupteigenschaft die Induktivität besitzt, ist die Spule.
Bei einer Spule verstärkt sich der Effekt der Selbstinduktion durch die Windungszahl.

Schaltzeichen einer Spule:



Bei der angegebenen Zählpfeilrichtung (Verbraucherzählpfeilsystem) gilt für die zeitlichen Verläufe von $u(t)$ und $i(t)$ an einer idealen Spule:

$$u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}\, i(t)}{\mathrm{d}\, t} = L \cdot \dot{i}(t)$$

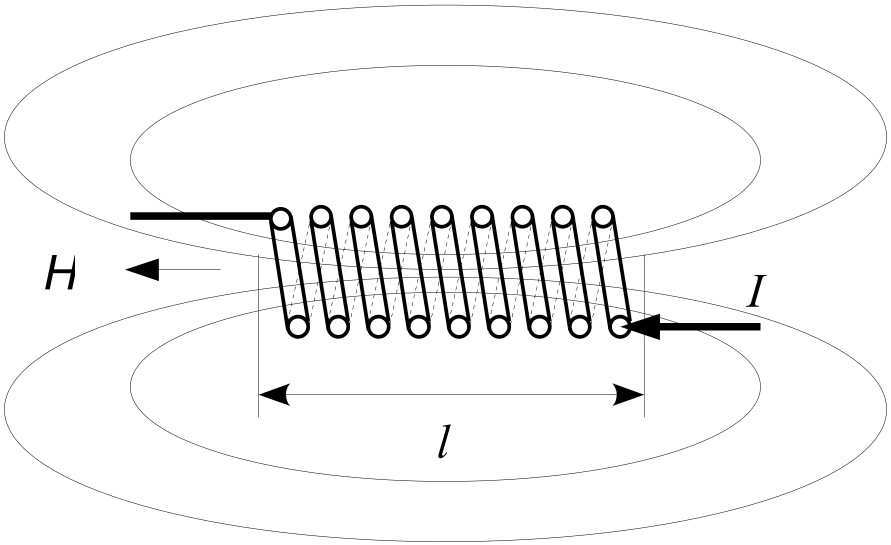
Weitere Schaltsymbole für Induktivitäten:

mit Eisenkern　　alte Norm　　alte Norm, mit Eisenkern

Induktivität einer Spule

Als Beispiel soll die Induktivität einer geraden Spule berechnet werden. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass die magnetische Feldstärke außerhalb der Spule gegen die Feldstärke innerhalb der Spule vernachlässigt werden kann.
Die Spule habe den wicklungsfreien Querschnitt *A*.

Die Feldstärke *H* innerhalb der Spule ergibt sich aus dem Durchflutungsgesetz zu



$$H = \frac{\Theta}{l} = \frac{n \cdot I}{l} \qquad \Theta = n \cdot I$$

mit $B = \mu \cdot H$ und $\Phi = B \cdot A$

folgt: $$\Phi = \frac{\mu \cdot n \cdot I \cdot A}{l}$$

Das Induktionsgesetz besagt : $$U = \frac{n \cdot \mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu \cdot n^2 \cdot A}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Die Proportionalitätskonstante zwischen *U* und der Ableitung des Stromes *I* nach der Zeit ist laut Definition die Induktivität *L*. Für eine gerade Spule gilt also:

$$L = \mu \cdot n^2 \cdot \frac{A}{l}$$

Spannung und Strom an einer idealen Spule - Vergleich mit Kondensator

Eine ideale Spule stellt für Gleichstrom keinen Widerstand dar.
Es fällt keine Spannung an ihr ab, sie entspricht einer idealen Leitung.
Erst bei Änderung des Stromes durch die Spule wird diese wirksam. Es wird eine entsprechende Spannung induziert.
Dieses Verhalten ähnelt dem des Kondensators, wenn man Strom und Spannung vertauscht.

Spule	**Kondensator**
$u_L(t)=L\cdot\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t}$	$i_C(t)=C\cdot\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t}$
Die Spulenspannung ist proportional zur zeitlichen Änderung des Spulenstromes und zur Induktivität *L*.	Der Kondensatorstrom ist proportional zur zeitlichen Änderung der Kondensatorspannung und zur Kapazität *C*.

Die Analogie lässt sich noch auf weitere Formeln anwenden, z.B. auf die Definition der Kapazität bzw. der Induktivität:

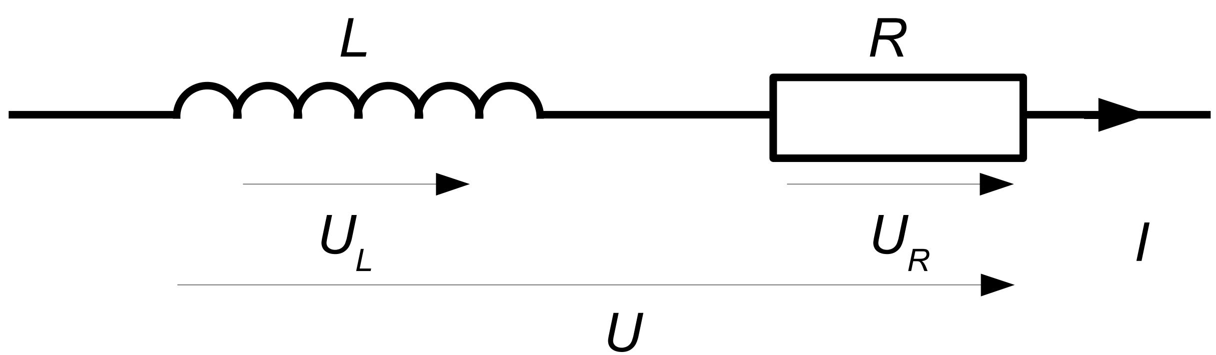
$L=\frac{n\cdot\Phi}{I}$	$C=\frac{Q}{U}$

Der mit der Windungszahl multiplizierte Fluss $n\cdot\Phi$ entspricht dabei der Ladung Q.

Die reale Spule

Die bisher betrachtete Spule, bei welcher die Spannung ausschließlich von der Strom**änderung** abhängt, gibt es in der Praxis nicht.

Eine reale Spule ist immer noch mit einem Widerstand behaftet (dies ist mindestens der Leitungswiderstand der Wicklung).

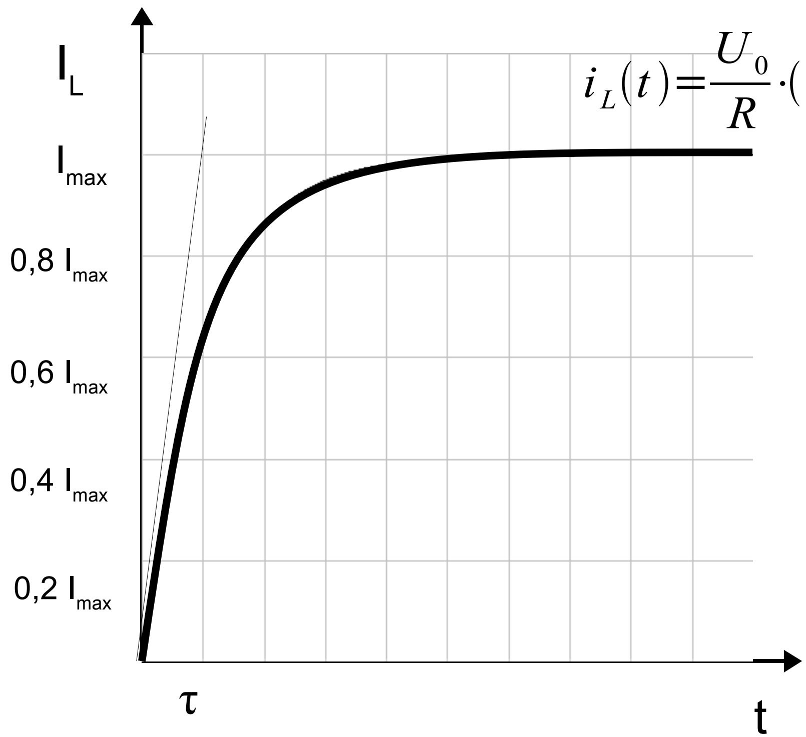


In diesem Fall gilt für die zeitlichen Verläufe der Gesamtspannung $u(t)$ und des Stromes $i(t)$ die folgende Abhängigkeit:

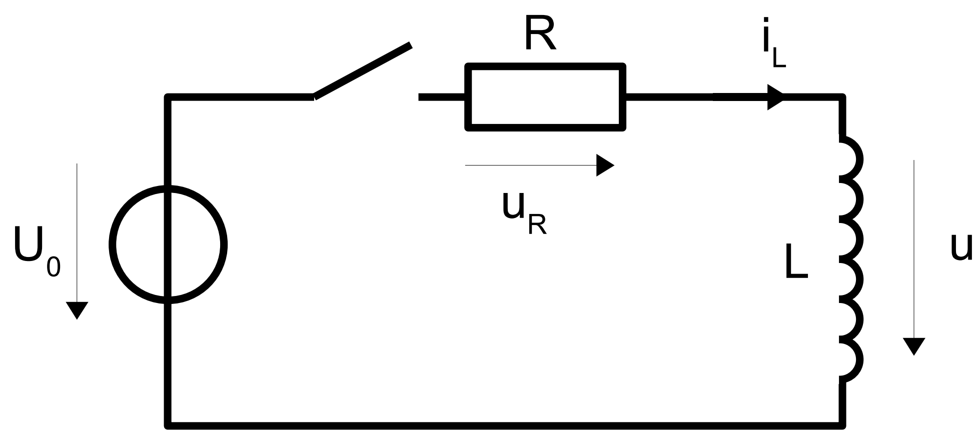
$$u(t) = U_L(t) + U_R(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R \cdot i(t)$$

Ausgleichsvorgänge an der Spule

Der Stromverlauf i_L in der Spule nach dem Schließen des Schalters entspricht der unten angegebenen Funktion.



$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{L/R}}\right)$$



- Der Quotient $\tau = L/R$ ist wieder die Zeitkonstante.
- τ hat die Einheit einer Zeit ($[\tau] = s$).
- Nach der Zeit τ hat der Strom ca. 63% seines Endwertes erreicht.

Ausgleichsvorgänge an der Spule, allgemeiner Fall

Nimmt man im allgemeinen Fall an, dass der Strom durch eine Spule zum Zeitpunkt t = 0 nicht null ist sondern I_a (Anfangswert).
Der Strom, welcher sich nach dem Ausgleichsvorgang durch die Spule einstellt sei I_e (Endwert).

Die Stromänderung $i_L(t)$ folgt dann der Funktion

$$i_L(t) = I_a + (I_e - I_a) \cdot (1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

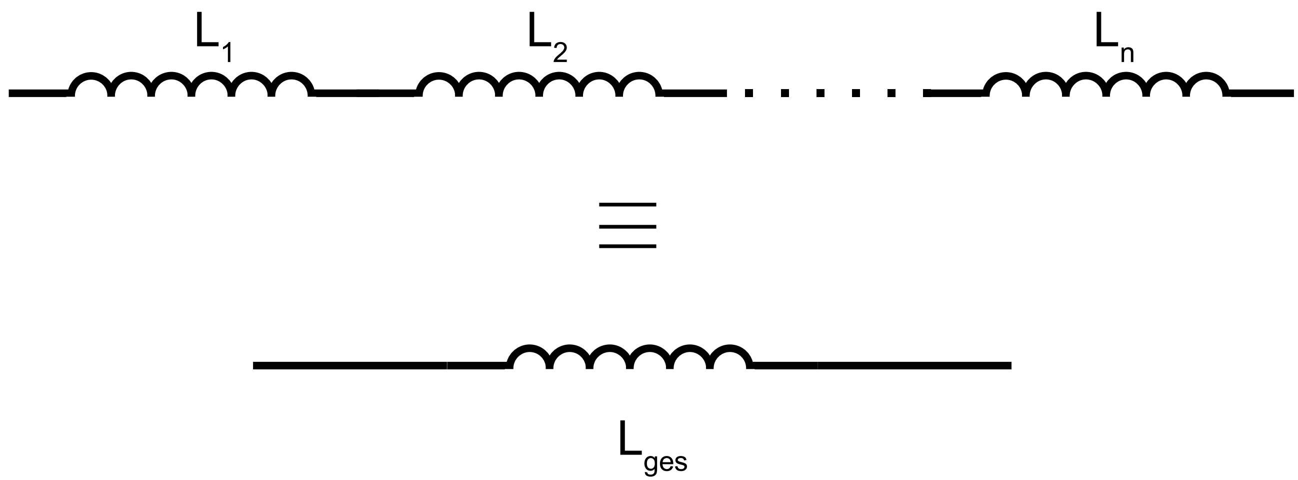
mit der Zeitkonstante $$\tau = \frac{L}{R}$$

Setzt man die Grenzen für t ein, ergeben sich die geforderten Werte.

$$i_L(0) = I_a + (I_e - I_a) \cdot (1 - e^0) = I_a$$

$$\lim_{t \to \infty} i_L(t) = I_a + (I_e - I_a) = I_e$$

Reihenschaltung von Induktivitäten

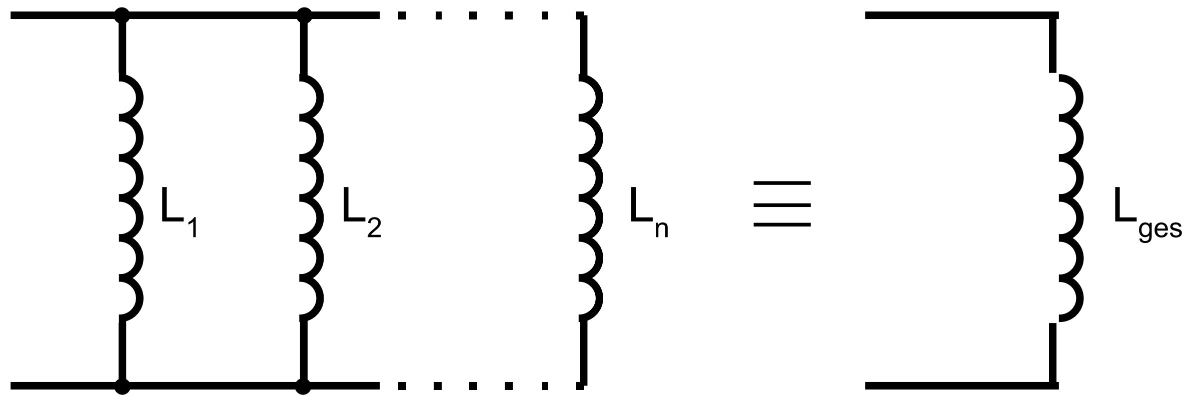


Schaltet man Induktivitäten in Reihe, so addieren sich die von der Stromänderung induzierten Gegenspannungen. Für die Gesamtinduktivität der Reihenschaltung gilt:

$$L_{ges} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Bei der Reihenschaltung von Spulen ist die Gesamtinduktivität gleich der Summe der Einzelinduktivitäten.

Parallelschaltung von Induktivitäten



Schaltet man Induktivitäten parallel, so verteilt sich der fließende Strom auf die Einzelinduktivitäten. Die Spannung ist für alle Induktivitäten die gleiche. Für die Gesamtinduktivität der Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{L_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$

Bei der Parallelschaltung von Spulen ist der Kehrwert der Gesamtinduktivität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelinduktivitäten.

Für das Zusammenschalten von Spulen gelten die gleichen Regeln wie für Widerstände.

Energieinhalt des Magnetfeldes einer idealen Spule

Im Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule ist Energie gespeichert. Die Energieaufnahme einer idealen Spule nach der Zeit *T* errechnet sich zu:

$$W = \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot \mathrm{d}\,t$$

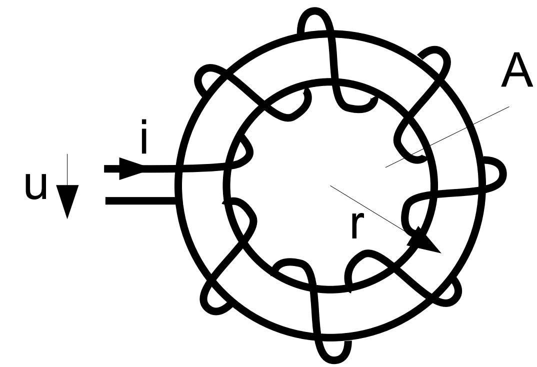
ersetzt man *u*(*t*) durch $u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}\,t}$

ergibt sich: $$W = \int_0^T L \cdot i(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} \cdot \mathrm{d}\,t$$

Eliminiert man die Zeit t als Integrationsvariable und integriert stattdessen über den Strom *i* (beginnend bei *i* = 0 bis *i* = *I*), so wird der Energieinhalt zu

$$W = \int_0^I L \cdot i(t) \cdot \mathrm{d}\,i \qquad \text{bzw.} \qquad W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

Energiedichte des Magnetfeldes



Die im Magnetfeld gespeicherte Energie läßt sich auch auf die Feldgrößen *B* und *H* zurückführen. Dies soll am Beispiel einer Toroid- oder Ring-Spule hergeleitet werden.

Bei kleinen Änderungen beträgt die Energiezunahme:

$$\Delta W = u \cdot i \cdot \Delta t$$

mit $u = n \cdot \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t}$, also $u \cdot \Delta t = n \cdot \Delta \Phi$ ergibt sich: $\Delta W = n \cdot i \cdot \Delta \Phi$

ersetzt man die Flussänderung durch $\Delta \Phi = A \cdot \Delta B$

und die Durchflutung durch $n \cdot i = 2 \pi r \cdot H$

wird $\Delta W = 2 \pi r \cdot H \cdot A \cdot \Delta B$

Mit dem vom Magnetfeld durchströmten Volumen $V = 2 \pi r \cdot A$

wird $\Delta W = V \cdot H \cdot \Delta B$

und $W = V \cdot \int H \cdot \mathrm{d} B$

Die Energiedichte ist $\dfrac{W}{V} = \int H \cdot \mathrm{d} B$

Materie im Magnetfeld

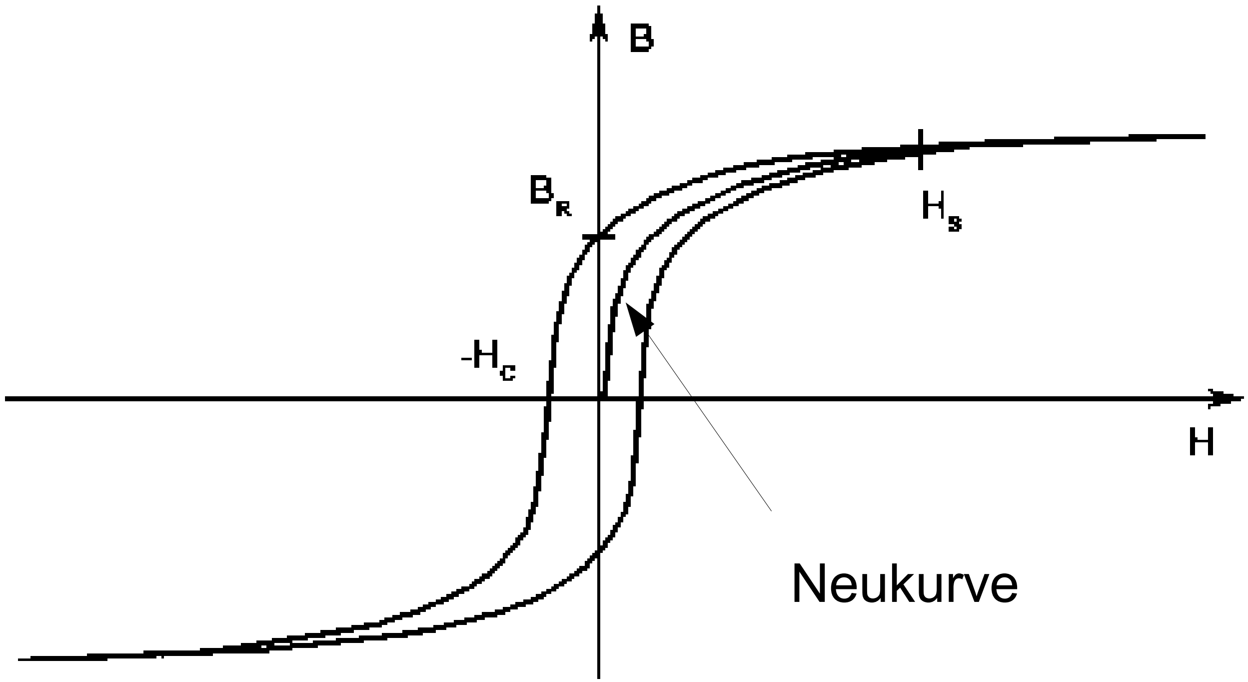
Wir haben bereits die relative Permeabilitätszahl μ_r als Materialkonstante des magnetischen Feldes kennengelernt.

Man unterscheidet drei Klassen von Materialien:

- **diamagnetische Stoffe** $\boldsymbol{\mu_r < 1}$
  Atome haben kein magnetisches Moment.
  Im Magnetfeld entstehen Kreisströme, welche das Feld schwächen.
  Beispiel: Wismut: $\mu_r = 0{,}99984$
- **paramagnetische Stoffe** $\boldsymbol{\mu_r > 1}$
  Atome haben ein magnetisches Moment
  Im Magnetfeld richten sich die Atome aus und verstärken das Magnetfeld
  Die Ausrichtung wird durch temperaturbedingte Molekularbewegung gestört
  Beispiel: Palladium: $\mu_r = 1{,}000782$
- **ferromagnetische Stoffe** $\boldsymbol{\mu_r \gg 1}$
  Eisen, Cobalt, Nickel und ihre Legierungen
  Erklärung durch Weiß'sche Bezirke
  Ausrichtung teilweise bleibend (Dauermagnet)
  Werte bis $\mu_r = 300000$

Magnetisierungskennlinie

Bei ferromagnetischen Stoffen ist der Zusammenhang von B und H auch von der Vorgeschichte abhängig. Diese Abhängigkeit wird mit der Magnetisierungskennlinie (Hysteresschleife) beschrieben.



Wichtige Kennwerte:

- Sättigungspunkt H_S
- Remanenzflussdichte B_R
- Koerzitivfeldstärke H_C

Werkstoffe mit geringer Koerzitivfeldstärke und geringer Fläche innerhalb der Hystereseschleife nennt man **weichmagnetisch**.

Bei hoher Koerzitivfeldstärke, großer Remanenz und entsprechend großer Fläche innerhalb der Kennlinie nennt man das Material **hartmagnetisch**.

Ummagnetisierungs- und Wirbelstromverluste

In magnetischen Bauelementen werden meist ferromagnetische Werkstoffe wegen der hohen Permeabilität eingesetzt.
Bei Wechselstromanwendungen durchläuft dabei die Feldstärke zyklisch die Hystereseschleife.
Die Weiß'schen Bezirke müssen immer wieder neu ausgerichtet werden.
Die hierzu nötige Energie wird als **Ummagnetisierungsverlust** in Wärme umgesetzt.
Die Höhe der Ummagnetisierungsverluste hängt von der Fläche innerhalb der durchlaufenen Hystereseschleife, dem Volumen des Magnetmaterials sowie der Häufigkeit der Richtungswechsel ab.

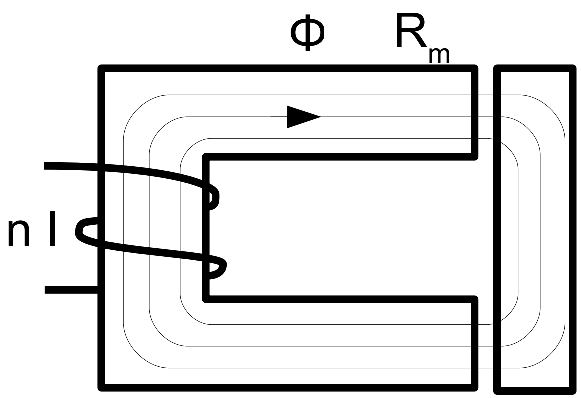
Für solche Anwendungen werden daher weichmagnetische Materialien bevorzugt.

Weitere Verluste ergeben sich, da durch die ständige Flussänderung im Magnetmaterial Spannungen induziert werden. Wenn das Magnetmaterial leitfähig ist, fließen sogenannte **Wirbelströme**, welche ebenfalls Energie in Wärme umwandeln.

Um die Wirbelstromverluste klein zu halten, versucht man den elektrischen Widerstand des Materials groß zu machen. Dies gelingt z.B. durch Blechpakete oder entsprechende Sintermaterialien (Ferrite).

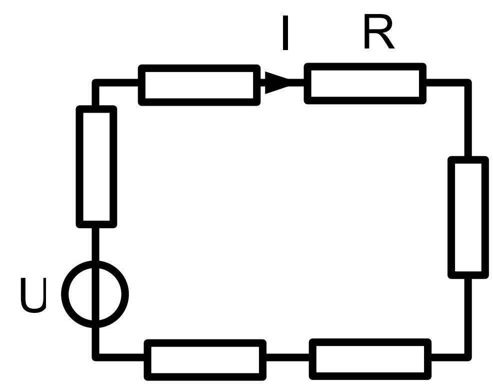
Der magnetische Kreis

Ferromagnetische Stoffe „führen“ aufgrund ihrer hohen Permeabilität praktisch das magnetische Feld. Nahezu der gesamte magnetische Fluss Φ (mit Ausnahme des sog. Streuflusses) verläuft im ferromagnetischen Material. Man kann daher den magnetischen Kreis mit einem Stromkreis vergleichen. Der Fluss entspricht dabei dem elektrischen Strom.



magnetischer Kreis

Folgende Größen sind vergleichbar:



elektrischer Stromkreis

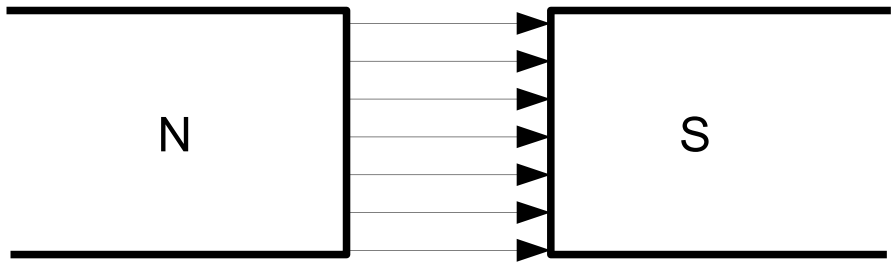
magnetischer Fluss Φ	elektrischer Strom I
Durchflutung Θ	Spannung U
„magnetischer Widerstand“ R_m	el. Widerstand R
Teildurchflutung $V_m = R_m \cdot \Phi$	Spannungsabfall $U = R \cdot I$

Im homogenen Feld gilt in Analogie zum Ohmschen Gesetz: $$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{H \cdot l}{B \cdot A} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

Die größten magnetischen Widerstände sind die Luftspalte!
Dauermagnete im Kreis wirken wie zusätzliche Durchflutung.

Kraftwirkung an magnetischen Polen

Wir wollen die Kraft zwischen zwei Magnetpolen berechnen.



A : Polfläche
s : Luftspaltlänge
H_L : Feldstärke im Luftspalt

Der Zusammenhang zwischen Feldstärke H_L und Flussdichte B_L im Luftspalt ist:

$$B_L = \mu_0 \cdot H_L \qquad \text{bzw.} \qquad H_L = \frac{B_L}{\mu_0}$$

Im Luftspalt ist die magnetische Energie über die Energiedichte und das Volumen V = A·s definiert:

$$W_{mag} = A \cdot s \cdot \int_0^{B_L} H \,\mathrm{d}B = A \cdot s \cdot \int_0^{B_L} \frac{B}{\mu_0} \,\mathrm{d}B = \frac{A \cdot s \cdot B_L^2}{2 \cdot \mu_0} = \frac{A \cdot s \cdot B_L \cdot H_L}{2}$$

Diese Energie ändert sich, wenn der Luftspalt um einen Betrag Δs verändert wird. Die dabei benötigte mechanische Arbeit entspricht der Änderung der magnetischen Energie:

$$\Delta W_{mech} = \Delta W_{mag} \qquad \text{also} \qquad F_{mag} \cdot \Delta s = \frac{A \cdot \Delta s \cdot B_L \cdot H_L}{2}$$

Die Kraft eines Magnetpols beträgt daher:

$$F_{mag} = \frac{A \cdot B_L \cdot H_L}{2}$$

Lineare Netze

Wir kennen bereits aus der Gleichstromtechnik den Begriff des linearen Netzes. Gleichstromnetze bestehen aus Stromquellen, Spannungsquellen und Widerständen.
Läßt man beliebige zeitliche Verläufe der Quellenspannungen und -ströme zu, so müssen auch Spulen und Kondensatoren berücksichtigt werden.

Allgemein sind lineare Netze also Schaltungen aus den Grundelementen

- Widerstand
- Kondensator (Kapazität)
- Spule (Induktivität)

sowie aus Strom- und Spannungsquellen mit beliebigem zeitlichen Verlauf.

Vereinfachende Annahmen:

Die Eigenschaften der Bauelemente werden als ideal und zeitlich unveränderlich angenommen.

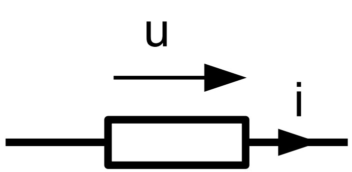
Alle elektrotechnisch relevanten Vorgänge sind in den Bauelementen konzentriert (Die Verbindungslinien im Schaltplan sind elektrisch neutral).

Räumliche Ausbreitungsvorgänge im Netz werden vernachlässigt (Gleichzeitigkeit).

Grundgleichungen linearer Netze

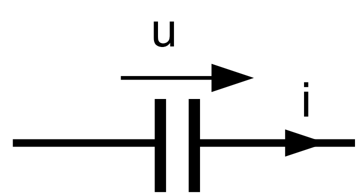
Zur Berechnung linearer Netze sind die bereits bekannten Zusammenhänge zwischen Klemmenstrom und Klemmenspannung der Bauelemente sowie die beiden Kirchhoffschen Gesetze zu berücksichtigen.

Widerstand



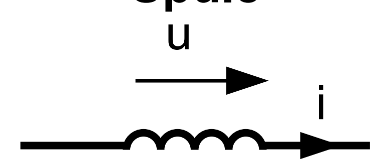
$$u = R \cdot i$$

Kondensator



$$i = C \cdot \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t}$$

Spule



$$u = L \cdot \frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$$

(Verbraucherzählpfeilsystem!)

1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel)

$$\sum_{\nu=1}^{n} i_{\nu} = 0$$

2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel)

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_{\nu} = 0$$

Wie in Gleichstromnetzen wird das Netz durch ein lineares Gleichungssystem beschrieben. Aufgrund der Ableitungen von Strom bzw. Spannung handelt es sich jetzt jedoch um ein System **linearer Differentialgleichungen**.

Es gilt auch hier der **Überlagerungssatz**:
Die Wirkungen der einzelnen Quellen addieren sich in jedem Zweig des Netzes (Superpositionsprinzip).

Sinusförmige Wechselspannung bzw. -strom

Die Berechnung linearer Netze vereinfacht sich, wenn man für die Quellen nicht beliebige sondern nur sinusförmige Größen zuläßt.

Eine sinusförmige Größe (im Beispiel eine Spannung) kann mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Statt der Sinusfunktion wird hier die Cosinusfunktion verwendet, in Vorbereitung auf spätere Berechnungen.

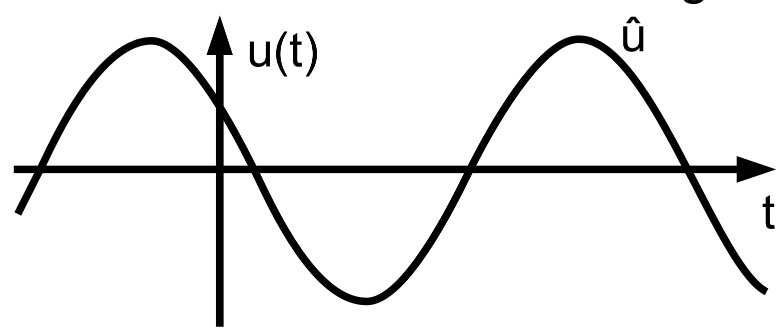
Momentanwert, Augenblickswert

Amplitude, Spitzenwert

Kreisfrequenz

Nullphasenwinkel, Phasenlage

Der zeitliche Verlauf ist eine periodische Funktion



Gründe für die Beschränkung auf sinusförmige Größen sind:

- Bei sinusförmiger Anregung sind im eingeschwungenen Zustand alle Ströme und Spannungen eines linearen Netzes ebenfalls sinusförmig.
- Viele technisch relevante Zeitverläufe lassen sich in sinusförmige Funktionen zerlegen.
- Sinusförmige Spannungen sind technisch einfach zu erzeugen und zu wandeln.

Frequenz, Periodendauer und Kreisfrequenz

Die Kreisfrequenz ω darf nicht mit der Frequenz *f* verwechselt werden.
Die **Frequenz *f*** gibt die Anzahl der Perioden (Schwingungen) pro Sekunde an. Die Einheit der Frequenz ist somit eine Zahl dividiert durch Sekunde:

$$[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$$ (Hertz, nach Heinrich Hertz)

Eine Frequenz lässt sich für jedes periodische Signal angeben.

Die **Kreisfrequenz ω** ergibt als Produkt mit der Zeit t einen Winkel als Argument für die Kosinusfunktion. Diese Größe ergibt nur bei sinusförmigen Signalen Sinn.
Der Winkel wird üblicherweise im Bogenmaß angegeben, ist also dimensionslos.
Daher hat auch die Kreisfrequenz die Einheit

$$[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}$$ Hier wird die Kurzform Hz nicht benutzt!

Da eine volle Periode dem Winkel 2π entspricht, gilt der Zusammenhang:

$$\omega = 2\pi f$$

Die **Periodendauer *T*** ist die Zeit, die für einen Zyklus benötigt wird. Sie errechnet sich aus der Frequenz durch Kehrwertbildung:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Kennwerte sinusförmiger Wechselspannungen und -ströme

Eine sinusförmige Wechselgröße lässt sich durch Angabe von Frequenz, Nullphasenwinkel und Amplitude eindeutig beschreiben.
In einem Wechselstromnetz ist die Frequenz überall gleich.

Beispiele:

- Energieversorgung (Steckdose): 50 Hz (USA: 60 Hz)
- Bahnstromversorgung: 16 2/3 Hz = 50/3 Hz
- Bordnetz Flugzeuge: 400 Hz

Der Nullphasenwinkel ist für die Spezifikation der Größen oft nicht relevant (meist interessiert nur die Phasenlage zu einer anderen Größe).

Daher reicht meist zur Kennzeichnung die Frequenz des Netzes und eine Größe zur Spezifikation der Amplitude. Die direkte Angabe der Amplitude hat sich nicht durchgesetzt. Stattdessen wird der quadratische Mittelwert einer Periode, der sogenannte **Effektivwert** angegeben.

Dem Formelzeichen U bzw. I der Spannungs- oder Stromangaben sieht man nicht an, ob es sich um Gleichstrom- oder Wechselstromgrößen handelt.
Um diesen Unterschied klarzustellen, wird ggf. eine der folgenden Kennzeichnungen verwendet:

DC oder AC (Direct current <-> Alternating current)
= oder ≈ bzw. ~
„rms“ (Root Mean Square) für Effektivwert bei Wechselstrom

Effektivwert

Der Effektivwert einer Wechselgröße ist als quadratischer Mittelwert definiert. Für den Effektivwert einer sinusförmigen Spannung gilt:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{u}^2 \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t}$$

Über die Stammfunktion zum Integral über cos²(ωt) ergibt sich:

$$\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\omega t + \sin(\omega t)\cos(\omega t)}{2\omega}\right]_0^T = \frac{T}{2}$$

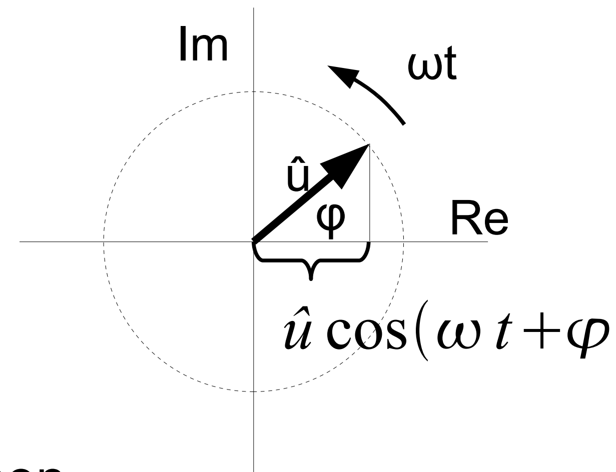
$$\Rightarrow \quad U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \hat{u}^2 \cdot \frac{T}{2}} \quad \Rightarrow \quad U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Entsprechend gilt für Ströme: $I_{eff} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$

Nur für **sinusförmige Zeitverläufe** ist der Effektivwert mit der Amplitude über den konstanten Faktor 1/√2 ≈ 0,707 verknüpft.
√2 ist der **Scheitelfaktor** für sinusförmige Größen.

Die an einem Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung der Wechselspannung entspricht der Leistung einer Gleichspannung in Höhe des Effektivwertes.

Zeigerdiagramm und komplexe Darstellung



Die Verwendung der Winkelfunktionen legt die Darstellung der sinusförmigen Größen in einem Zeigerdiagramm nahe.

Das Zeigerdiagramm läßt sich mathematisch als die Ebene der komplexen Zahlen interpretieren. Es zeigt sich, dass die Rechenregeln für komplexe Zahlen die Berechnung von Wechselstromnetzen deutlich vereinfachen.

In der Elektrotechnik wird üblicherweise als imaginäre Einheit der Buchstabe j verwendet.

Die Zeitfunktion u(t) lässt sich als der Realteil einer komplexen Zahl $\underline{U}(t)$ darstellen.

$$u(t)=\Re\left\{\underline{U}(t)\right\}$$

Stellt man $\underline{U}(t)$ in der Exponentialform dar, ergibt sich:

$$u(t)=\Re\left\{\hat{u}\,e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}=\hat{u}\cos(\omega t+\varphi)$$

Mit der komplexen Amplitude der Wechselspannung $\underline{U}=\hat{u}\,e^{j\varphi}$

wird $u(t)=\Re\left\{\underline{U}\,e^{j\omega t}\right\}$

Strom- und Spannungsverlauf am Widerstand bei sinusförmiger Anregung

Wir betrachten den Zusammenhang zwischen Strom- und Spannung bei sinusförmigen Zeitverläufen am Ohm'schen Widerstand *R*.

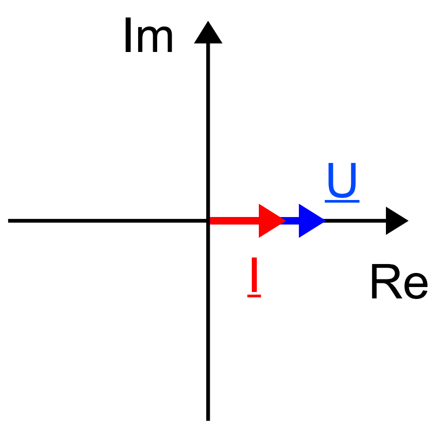
Es gilt das Ohm'sche Gesetz. $u = R \cdot i$ also $u(t) = \underbrace{R \cdot \hat{\imath}}_{\hat{u}} \cdot \cos(\omega t + \underbrace{\varphi_i}_{\varphi_u})$

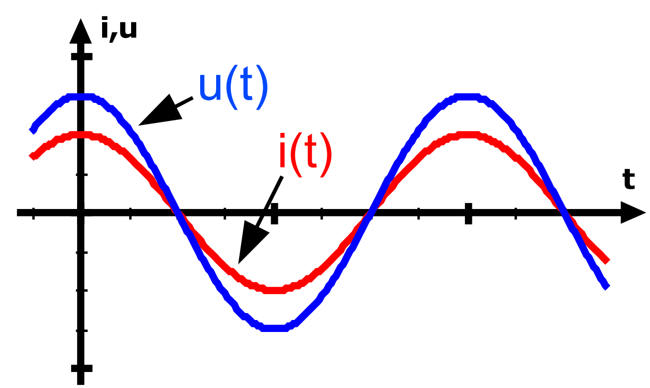
Für die Amplituden und Nullphasenwinkel gilt also

$$\hat{u} = R \cdot \hat{\imath} \qquad \varphi_u = \varphi_i$$

mit komplexen Amplituden wird dieser Zusammenhang wie folgt dargestellt:

$$\underline{U} = \hat{u}\, e^{j\varphi_u} = R \cdot \hat{\imath}\, e^{j\varphi_i} \quad \text{also} \quad \underline{U} = R \cdot \underline{I}$$





Strom und Spannung an einem Widerstand haben immer den gleichen Nullphasenwinkel, d.h. sie sind „in Phase“.

Strom- und Spannungsverlauf am Kondensator bei sinusförmiger Anregung

An einem Kondensator der Kapazität *C* gilt $i = C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

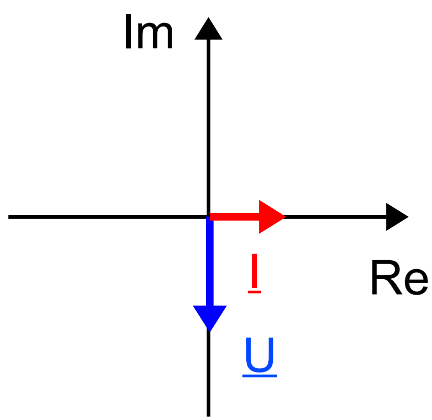
Daraus wird bei sinusförmigem Zeitverlauf:

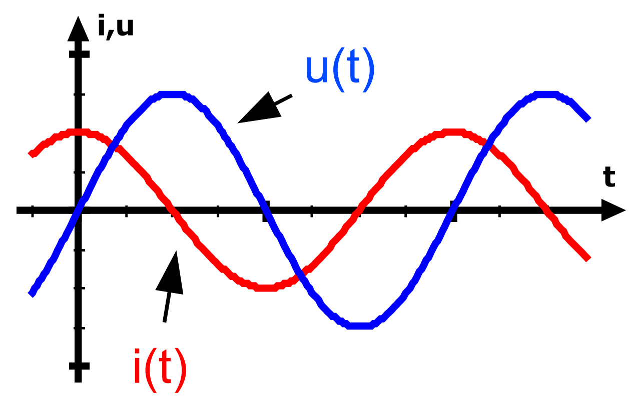
$$i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)) = \omega C \cdot \hat{u} \cdot (-\sin(\omega t + \varphi_u)) = \overbrace{\omega C \cdot \hat{u}}^{\hat{\imath}} \cdot \cos(\omega t + \overbrace{\varphi_u + \frac{\pi}{2}}^{\varphi_i})$$

Für die Amplituden und Nullphasenwinkel gilt also $\hat{u} = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{\imath}$ $\quad \varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$

mit komplexen Amplituden: $\underline{U} = \hat{u}\, e^{j\varphi_u} = \frac{1}{\omega C} \hat{\imath}\, e^{j\varphi_i - j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \hat{\imath}\, e^{j\varphi_i} = \frac{-j}{\omega C} \cdot \hat{\imath}\, e^{j\varphi_i}$

also $\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$





Der Phasenunterschied zwischen Strom und Spannung ist π/2.
Der Strom eilt der Spannung um π/2 voraus („I_{Kap} läuft trab").

Strom- und Spannungsverlauf an einer Spule bei sinusförmiger Anregung

An einer Spule der Induktivität *L* gilt $u = L \cdot \frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$

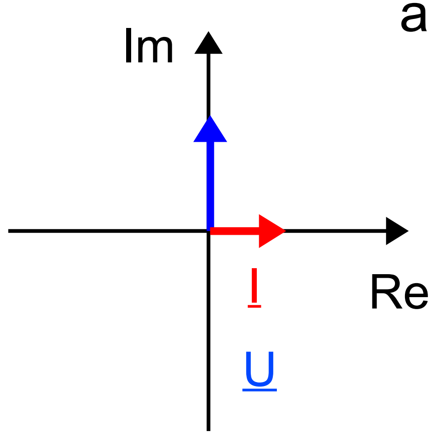
Daraus wird bei sinusförmigem Zeitverlauf:

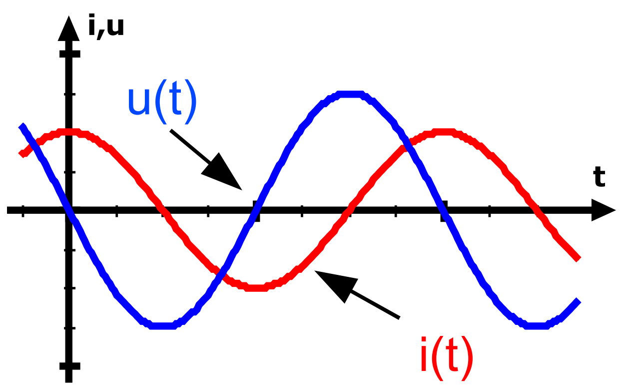
$$u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\hat{\imath} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)) = \omega L \cdot \hat{\imath} \cdot (-\sin(\omega t + \varphi_i)) = \overbrace{\omega L \cdot \hat{\imath}}^{\hat{u}} \cdot \cos(\omega t + \overbrace{\varphi_i + \frac{\pi}{2}}^{\varphi_u})$$

Für die Amplituden und Nullphasenwinkel gilt also $\hat{u} = \omega L \cdot \hat{\imath} \qquad \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$

mit komplexen Amplituden: $\underline{U} = \hat{u}\, e^{j\varphi_u} = \omega L \cdot \hat{\imath}\, e^{j\varphi_i + j\frac{\pi}{2}} = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \hat{\imath}\, e^{j\varphi_i} = j\omega L \cdot \hat{\imath}\, e^{j\varphi_i}$

also $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$





Der Phasenunterschied zwischen Strom und Spannung ist ebenfalls π/2. Der Strom hinkt der Spannung um π/2 hinterher („I_{Ind} läuft hint“, „Induktivitäten – Ströme sich verspäten“).

Impedanz und Admittanz

Für die drei Grundelemente linearer Netze gelten bei sinusförmiger Anregung unter Verwendung der komplexen Amplituden folgende Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung.

Widerstand	Kondensator	Spule
$\underline{U}=R\cdot\underline{I}$	$\underline{U}=\frac{1}{j\omega C}\cdot\underline{I}$	$\underline{U}=j\omega L\cdot\underline{I}$

Diese drei Gleichungen lassen sich zusammenfassen, wenn man den jeweiligen komplexen Faktor als **Scheinwiderstand** oder **Impedanz $\underline{Z}$** einführt:

$$\underline{U}=\underline{Z}\cdot\underline{I}$$

Der (komplexe) Kehrwert der Impedanz heißt **Scheinleitwert** oder **Admittanz $\underline{Y}$**.

$$\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}$$

	Impedanz	Admittanz
Widerstand:	$\underline{Z}=R$	$\underline{Y}=\frac{1}{R}=G$
Kondensator:	$\underline{Z}=\frac{1}{j\omega C}$	$\underline{Y}=j\omega C$
Spule:	$\underline{Z}=j\omega L$	$\underline{Y}=\frac{1}{j\omega L}$

Impedanz und Admittanz bei Kombinationen der Grundelemente

Die Impedanz bzw. Admittanz der Grundelemente Widerstand, Kondensator und Spule sind rein reel bzw. rein imaginär.
Bei Zusammenschaltung der Grundelemente entstehen durch Addition auch Impedanzen (bzw. Admittanzen) mit beliebigen komplexen Werten.

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

Der Realteil der Impedanz heißt **Wirkwiderstand** oder **Resistanz R**.
Der Imaginärteil der Impedanz heißt **Blindwiderstand** oder **Reaktanz X**.

$$\underline{Z} = R + j\,X$$

Auch die Admittanz $\underline{Y}$ läßt sich entsprechend in **Wirkleitwert** oder **Konduktanz G** und **Blindleitwert** oder **Suszeptanz B** zerlegen.

$$\underline{Y} = G + j\,B$$

Gemäß den Rechenregeln der komplexen Rechnung bewirkt die Multiplikation einer komplexen Amplitude mit einer komplexen Zahl eine Änderung des Betrages und eine Drehung des Nullphasenwinkels.

Impedanz und Admittanz sind im allgemeinen von der Kreisfrequenz ω abhängig.

Reihen- und Parallelschaltung von Impedanzen

Für Impedanzen gelten die gleichen Regeln wie für ohm'sche Widerstände in der Gleichstromtechnik.

Bei der Reihenschaltung von Bauelementen addieren sich die Impedanzen (komplexe Addition!)

Reihenschaltung: $$\underline{Z_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z_i} = \sum_{i=1}^{n} R_i + j \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Bei der Parallelschaltung von Bauelementen addieren sich die Admittanzen (komplexe Addition!)

Parallelschaltung: $$\underline{Y_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Y_i} = \sum_{i=1}^{n} G_i + j \sum_{i=1}^{n} B_i$$

Die Lösungsverfahren der Gleichstromtechnik (z.B lineare Gleichungssysteme) lassen sich daher auch für Wechselstromnetze verwenden, welche von sinusförmigen Quellen gleicher Frequenz angeregt werden.
Es ist dabei nur die komplexe Rechnung zu verwenden.

Fourieranalyse

Der französische Physiker Jean Baptiste Fourier entdeckte, dass periodische Funktionen als Überlagerung von sinusförmigen Funktionen unterschiedlicher Frequenz, Amplitude und Phase dargestellt werden können (plus einem Gleichanteil).

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\hat{a}_\nu\cos(\nu\omega t+\varphi_\nu)$$

Man kann ein (periodisches) Signal also als ein Gemisch von Einzelfrequenzen betrachten, für welche die komplexe Rechnung angewandt werden kann. Die Einzelfrequenzen überlagern sich im linearen Netz. So lassen sich lineare Netze auch bei nicht sinusförmigen Anregungen berechnen.

Neben der **Darstellung des Signals im Zeitbereich** gibt es also auch die **Darstellung im Frequenzbereich (Spektrum).** Beide Bereiche sind gleichwertig und beschreiben dasselbe Signal.

Ein lineares Netz wirkt sich auf die einzelnen Frequenzen eines Signals unterschiedlich aus (die Impedanz ist meist frequenzabhängig!). Sowohl Amplitude als auch Nullphasenwinkel der Frequenzen werden verändert.

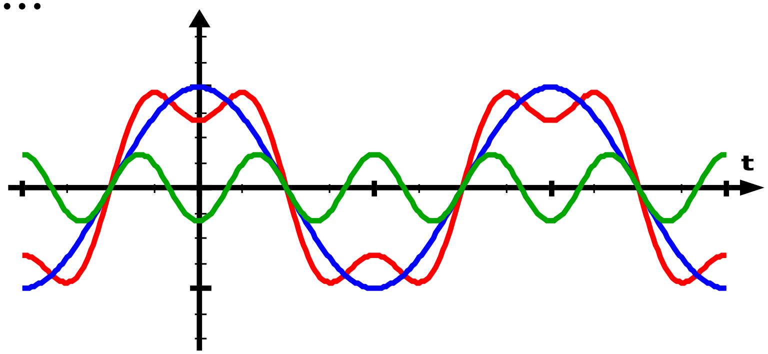
Setzt man das Spektrum des Ein- und Ausgangssignal eines Netzes ins Verhältnis, so ergibt sich der **Frequenzgang** des Systems, bestehend aus **Amplitudengang** und **Phasengang**. Damit wird das Übertragungsverhalten des Netzes und seine Auswirkung auf das Eingangssignal beschrieben.

Überlagerung von sinusförmigen Funktionen (Beispiel)

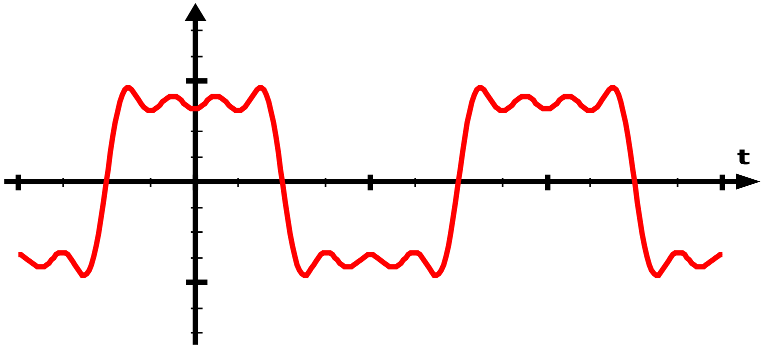
Eine Rechteckfunktion wird nach folgender Formel in einzelne Frequenzen zerlegt:

$$f(t) = \cos(\omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega t) \pm \ldots$$

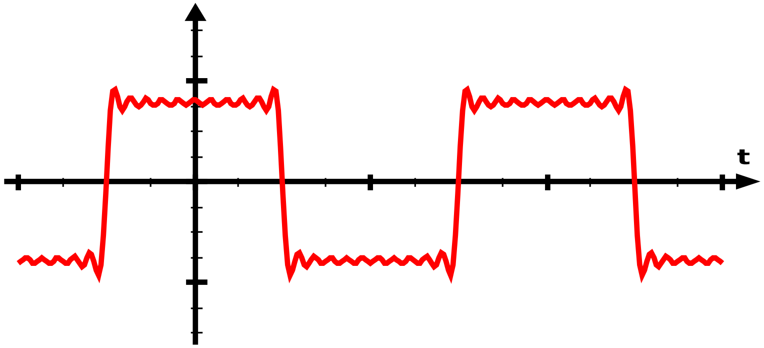
Überlagerung bis zur 3. Oberwelle



Überlagerung bis zur 7. Oberwelle



Überlagerung bis zur 21. Oberwelle

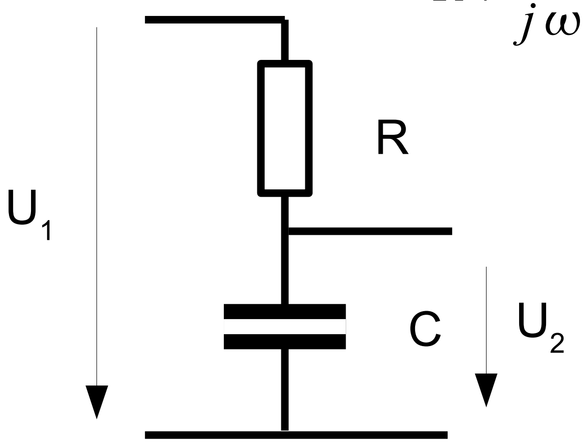


Einige Zusammenhänge zwischen Zeit- und Frequenzbereich

- Der „Gleichanteil“ des Signals, also der zeitliche Mittelwert, wird rechnerisch auf eine Funktion der Frequenz null abgebildet.
- Die kleinste vorkommende Frequenz, und damit die Schrittweite im Frequenzbereich ist der Kehrwert der Periodendauer.
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
- Das bedeutet im Grenzübergang, dass eine unendlich lange Periodendauer (= nicht periodisches Signal) zu einer kontinuierlichen Funktion im Frequenzbereich führt.
- „Steile“ Flanken im Zeitbereich bedeuten hohe Frequenzanteile im Frequenzbereich. Ein Rechteck z.B. läßt sich nur mit unendlich vielen Frequenzlinien exakt beschreiben.
- Gerade Funktionen (achsensymmetrisch zur y-Achse) bestehen nur aus cos-Anteilen im Frequenzbereich.
- Ungerade Funktionen (punktsymmetrisch zum Nullpunkt) bestehen nur aus sin-Anteilen im Frequenzbereich.
- Zeitlich abgetastete Signale lassen sich bis zur halben Abtastfrequenz wiederherstellen. Hat das Signal höhere Frequenzanteile, so gehen diese durch die Abtastung verloren und können nicht wiederhergestellt werden (Abtasttheorem).

Grenzfrequenz

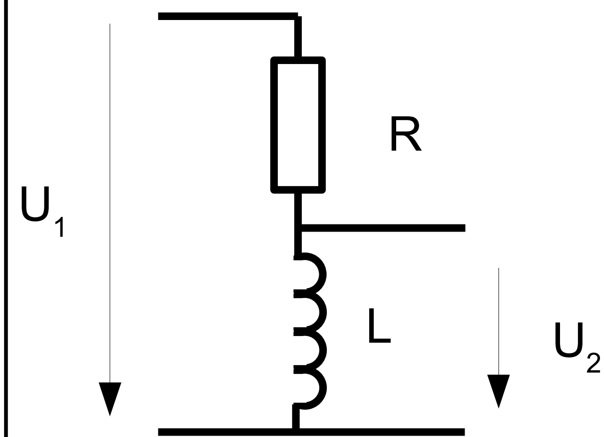
RC-Glied: $\dfrac{\underline{\underline{U}}_2}{\underline{U}_1} = \dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}} = \dfrac{1}{1+j\omega RC}$



$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

RL-Glied: $\dfrac{\underline{\underline{U}}_2}{\underline{U}_1} = \dfrac{j\omega L}{R+j\omega L} = \dfrac{1}{1+\dfrac{R}{j\omega L}}$



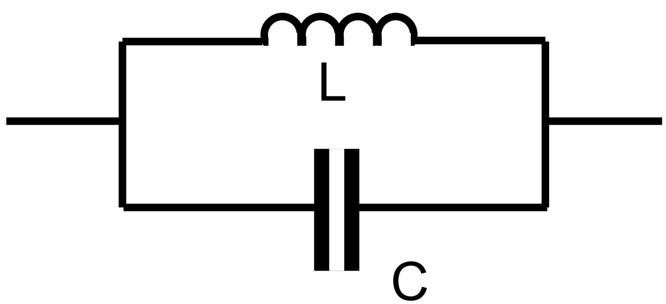
$$\omega_g = \frac{1}{L/R}$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi L/R}$$

Die Spannungsteilerverhältnisse sind frequenzabhängig.
Bei der Kreisfrequenz ω_g sind der Realteil und der Imaginärteil des Teilerverhältnisses gleich. Die zugehörige Frequenz f_g heißt Grenzfrequenz.
Bei der Grenzfrequenz ist das Teilverhältnis $1/\sqrt{2} = 0{,}707$.
Die Phasendrehung beträgt 45°.
Die Ausgangsspannung am Kondensator wird bei höheren Frequenzen immer geringer, nur tiefe Frequenzen „passieren“ => **Tiefpass**. Bei der Spule ist es umgekehrt => **Hochpass**

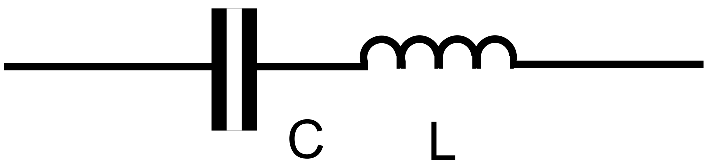
Resonanz

Parallelschwingkreis:



$$\underline{Y}=\frac{1}{j\omega L}+j\omega C$$

Reihenschwingkreis:



$$\underline{Z}=j\omega L+\frac{1}{j\omega C}$$

Von der **Resonanzfrequenz** f_0 spricht man, wenn sich die beiden Blindwiderstände bzw. Blindleitwerte gerade aufheben.

$$\frac{1}{j\omega_0 L}+j\omega_0 C=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{j\omega_0 L}=-j\omega_0 C$$

$$j\omega_0 L+\frac{1}{j\omega_0 C}=0 \quad\Rightarrow\quad j\omega_0 L=-\frac{1}{j\omega_0 C}$$

$$\omega_0^2 LC=1$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Bei der Resonanzfrequenz pendelt die Energie zwischen Kondensator (elektrisches Feld) und Spule (magnetisches Feld).

Leistungsbetrachtung an Impedanzen

Der Augenblickswert der Leistung ist das Produkt der Augenblickswerte von Spannung und Strom. Bei Wechselspannung ist der zeitliche Mittelwert der Leistung von Interesse.
Wir nehmen willkürlich an, der Nullphasenwinkel des Stromes sei null und die Spannung sei um den Winkel φ phasenverschoben.

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot i(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}\cos(\omega t+\varphi)\cdot\hat{\imath}\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$P=\frac{\hat{u}\cdot\hat{\imath}}{T}\int_0^T \cos(\omega t+\varphi)\cdot\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

In einer Formelsammlung findet man: $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

damit wird $P=\frac{\hat{u}\cdot\hat{\imath}}{2\mathrm{T}}\int_0^T \cos(\varphi)+\cos(2\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t=\frac{\hat{u}\cdot\hat{\imath}}{2}\cos\varphi$

Zerlegen des Faktors ½ und Einsetzen der Effektivwerte ergibt

$$P=\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad P=U_{eff}\,I_{eff}\cos\varphi$$

Wirkleistung, Scheinleistung, Blindleistung

Wirkleistung:
Die Wirkleistung *P* ist die mittlere elektrische Leistung, welche an einer Impedanz in eine andere Leistungsform (z.B. mechanisch, chemisch oder thermisch) gewandelt wird. Sie wird aus dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung und dem **Leistungsfaktor** cos φ berechnet (φ ist der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung).

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi \qquad [P] = \mathrm{W}$$

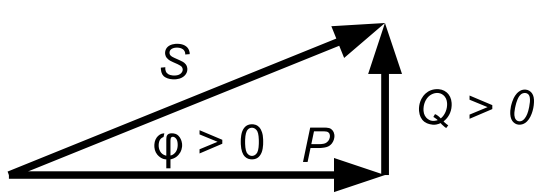
Scheinleistung:
Misst man nur die Effektivwerte von Strom und Spannung an einer Impedanz, ohne den Phasenwinkel zu berücksichtigen, erhält man die sogenannte Scheinleistung *S.*

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} \qquad [S] = \mathrm{V\,A}$$

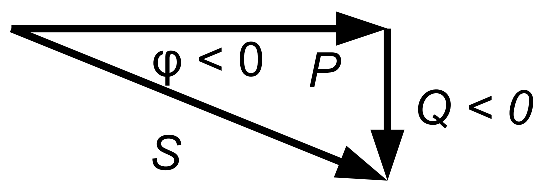
Blindleistung:
Scheinleistung und Wirkleistung spannen mit dem Winkel φ ein rechtwinkliges Dreieck auf. Die fehlende Kathete entspricht dabei der sogenannten Blindleistung *Q*

$$Q = U_{eff} I_{eff} \sin\varphi \qquad [Q] = \mathrm{var}$$ (voltampere reactive)

Q ist positiv bei induktiven Lasten.



Q ist negativ bei kapazitiven Lasten.

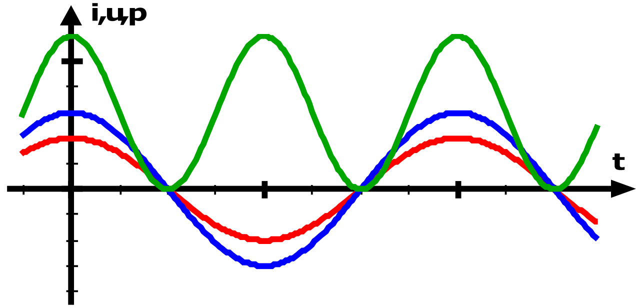


Nach Pythagoras gilt

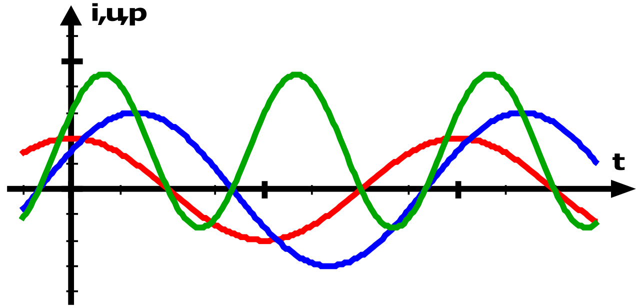
$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Deutung der Leistungsformen

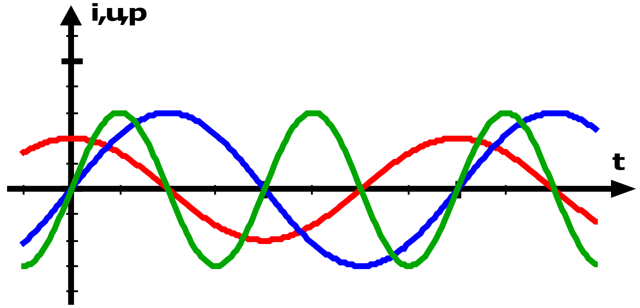
In den folgenden Diagrammen ist jeweils ein Stromverlauf i(t) in rot, ein Spannungsverlauf u(t) in blau und der Verlauf der Momentanleistung p(t) = u(t) i(t) in grün eingezeichnet.
Das Beispiel zeigt die Verhältnisse bei unterschiedlichen Phasenverschiebungen.



Strom und Spannung sind in Phase (φ = 0).
Die Leistung ist immer positiv, der Mittelwert ist die Wirkleistung.



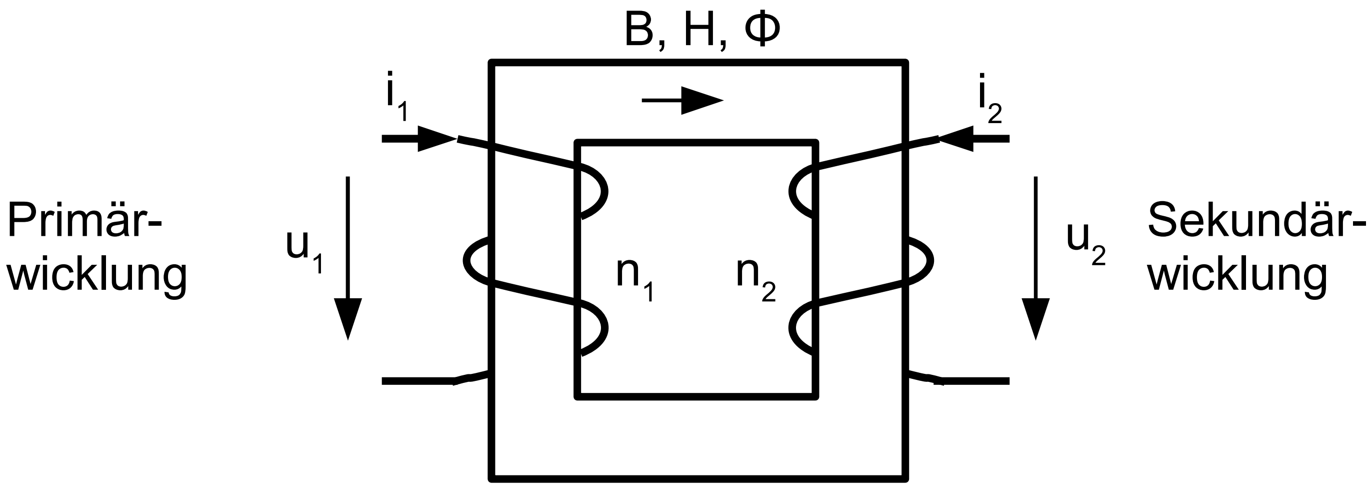
Strom und Spannung sind nicht in Phase (0 < φ < 90°).
Die Leistung ist teilweise negativ, d.h. ein Teil der Energie wird nicht umgesetzt sondern wieder ins Netz zurückgegeben.

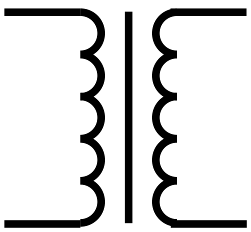


Strom und Spannung sind um 90° phasenverschoben (im Beispiel kapazitive Last). Die umgesetzte Leistung ist im Mittel null. Der Kondensator nimmt die Energie zunächst auf, um sie dann wieder abzugeben. Die Amplitude dieser pendelnden Leistung ist die Blindleistung.

Der ideale Transformator

Zwei (oder mehr) Spulen, welche magnetisch gekoppelt sind, bilden einen Transformator oder Übertrager. Mit einem Transformator lassen sich Wechselspannungen übertragen und ggf. in ihrer Amplitude ändern. Außerdem ermöglichen sie die galvanische Trennung von Stromkreisen.





Schaltsymbol

Nimmt man an, dass der gesamte magnetische Fluss durch beide Spulen geht, gilt für die Spannungen:

$$u_1 = n_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad u_2 = n_2 \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Bildet man das Verhältnis der Spannungen, erhält man

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Die Spannungen verhalten sich wie die Windungszahlen!

Ströme und Leistung am idealen Transformator

Zur Ermittlung des Stromverhältnisses gehen wir vom gemeinsamen Fluss Φ durch die Wicklungen aus. Mit der Flussdichte *B,* der Querschnittsfläche *A* der Eisenteile, der mittleren Länge *l* des Eisenkreises und der Durchflutung Θ ergibt sich:

$$\Phi = B \cdot A = \mu \cdot H \cdot A = \mu \cdot \frac{\Theta}{l} \cdot A \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{\Phi \cdot l}{\mu \cdot A}$$

Nimmt man ideales Magnetmaterial an, so geht μ gegen unendlich. Die benötigte Durchflutung wird dann im Grenzfall null.

$$\lim_{\mu \to \infty} \Theta = \lim_{\mu \to \infty} \frac{\Phi \cdot l}{\mu \cdot A} = 0$$

es ist also $\Theta = n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 \cdot i_1 = -n_2 \cdot i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{i_1}{-i_2} = \frac{n_2}{n_1}$

Die Beträge der Ströme verhalten sich umgekehrt wie die Windungszahlen!

Diese Aussagen gelten für den idealen Transformator, der keinen Streufluss und magnetisches Material mit unendlicher Permeabilität besitzt.

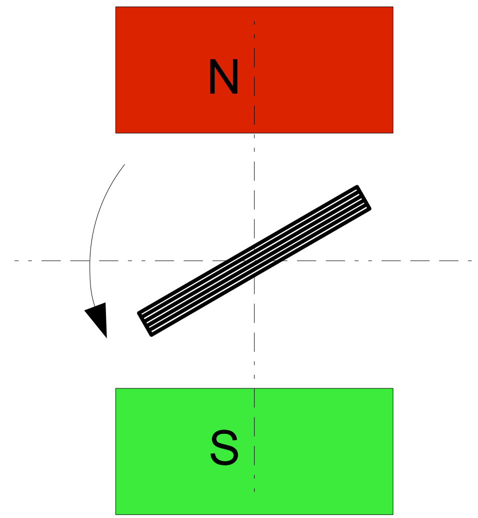
Betrachtet man die **Leistung** auf der Primär- und Sekundärseite, ergibt sich, dass im idealen Transformator keine Leistung verloren geht und auch zu keinem Zeitpunkt Energie gespeichert wird.

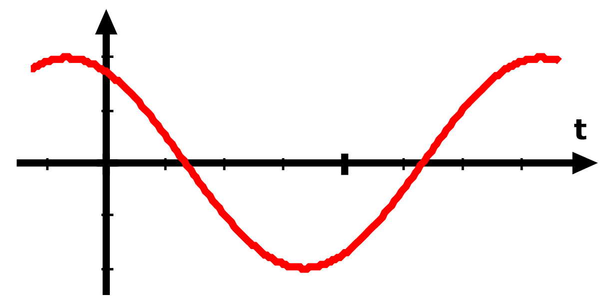
$$P_1 = u_1 \cdot i_1 = \frac{n_1}{n_2} \cdot u_2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot (-i_2) = -u_2 \cdot i_2 = -P_2$$

Erzeugung von Wechselspannung

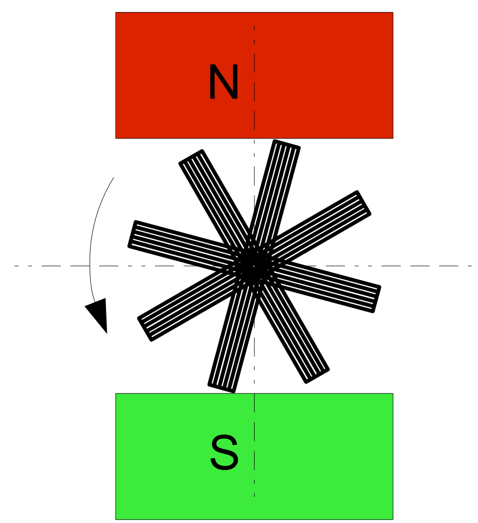
Prinzip eines Generators:

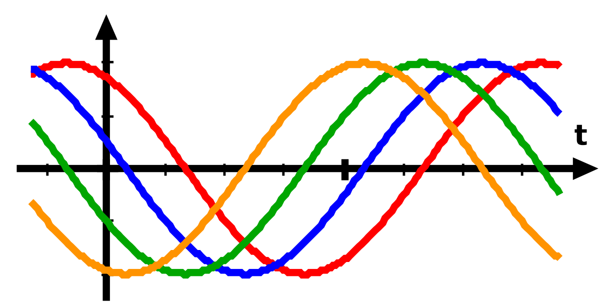
In einer im Magnetfeld rotierenden Spule wird eine sinusförmige Wechselspannung induziert.





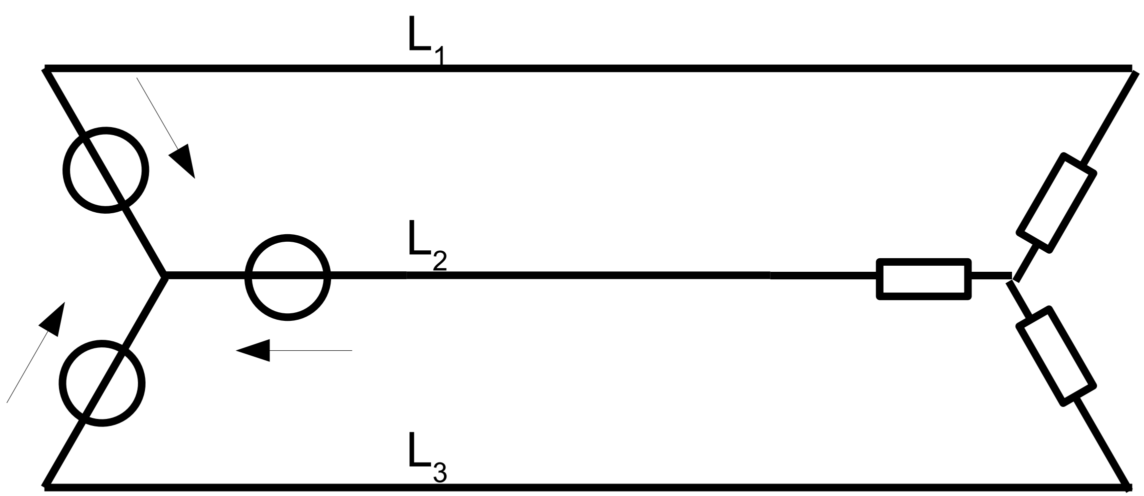
Lässt man mehrere Spulen im selben Magnetfeld rotieren, so können gleichzeitig mehrere Wechselspannungen mit jeweils festen Phasenbezügen generiert werden.

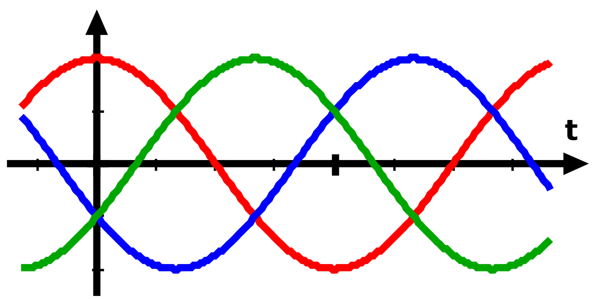




Drehstrom

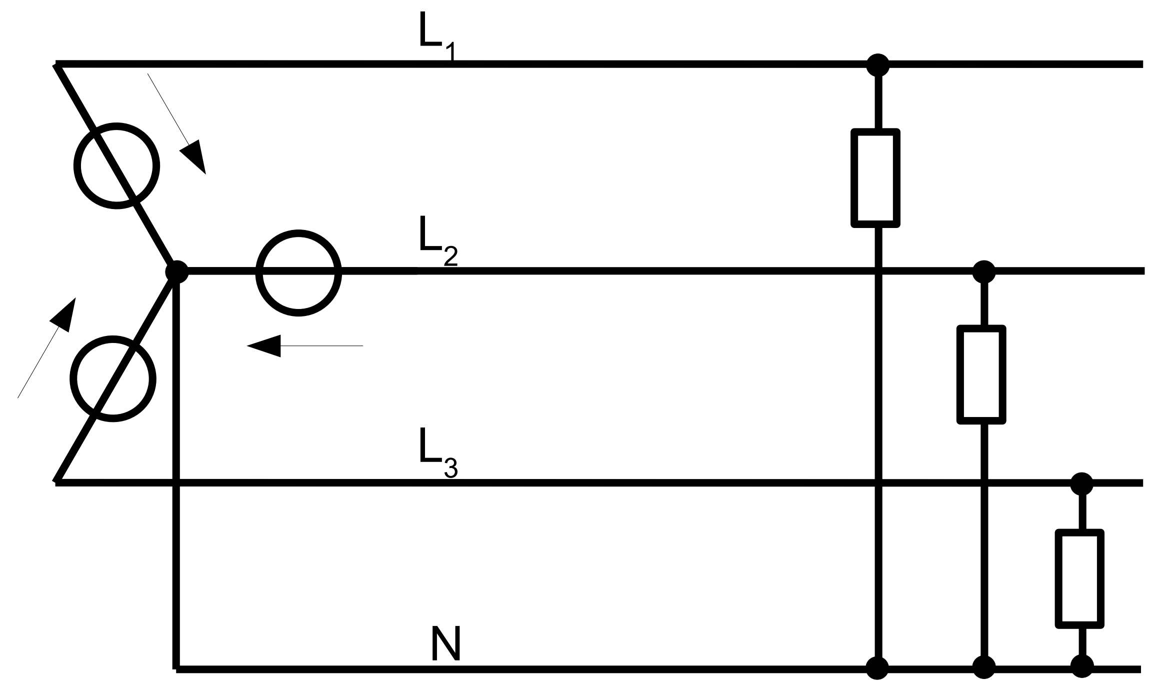
In einem Motor lassen sich die einzelnen phasenverschobenen Ströme so durch geeignet angeordnete Spulen führen, dass ein rotierendes Magnetfeld entsteht.
Dieses Magnetfeld treibt dann wieder einen (magnetischen) Rotor an.
Daher bezeichnet man ein solches Mehrphasensystem als **Drehstromsystem**.
Für den Transport der Energie wäre für jede Phase eine Hin- und Rückleitung nötig.
Eine Vereinfachung ergibt sich bei **genau drei** um 120° phasenverschobenen Spannungen. In diesem Fall ist die Summe der drei Spannungen bzw. bei gleichmäßiger Belastung auch der resultierenden Ströme zu jedem Zeitpunkt gleich null.
Daher sind in einem solchen System im Prinzip nur drei Leitungen L_1, L_2 und L_3 zum Energietransport nötig (L steht für Line). Die Spannungen werden an der Quelle zusammengeschaltet.





Energieversorgungsnetz

In Energieversorgungsnetzen wird zusätzlich zu den Phasenspannungen auch der Sternpunkt vom Generator zum Verbraucher geführt (Neutralleiter N).



Die berührbaren Teile eines elektrischen Gerätes werden zur Sicherheit mit Erde verbunden. Hierzu dient der Anschluss PE (Protection Earth).
In den öffentlichen Versorgungsnetzen (Deutschland) betragen die Effektivwerte der Spannungen L_1, L_2 und L_3 gegenüber N, die sogenannten Strangspannungen

$$U_0 = 230\,\mathrm{V}$$

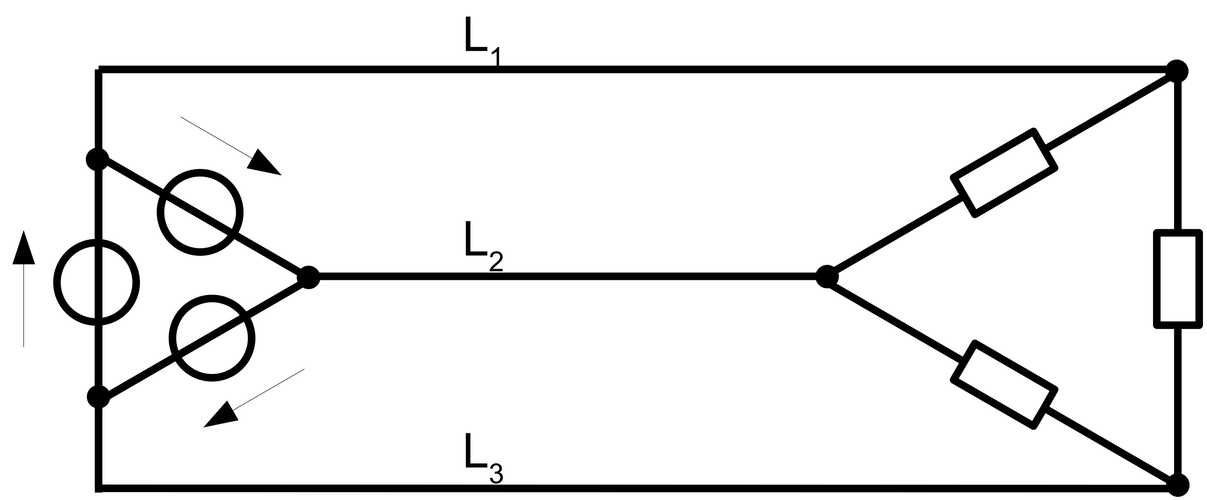
Zwischen den Einzelleitern L_1, L_2 und L_3 kann man die Leiterspannung messen:

$$U = U_0 \cdot \sqrt{3} \approx 400\,\mathrm{V}$$

Die Frequenz beträgt 50 Hz.

Stern- und Dreieckschaltung bei Drehstrom

Sowohl auf der Erzeuger- als auch auf der Verbraucherseite kann das Drehstromnetz auch als Dreieckschaltung dargestellt werden. In diesem Fall wird der Neutralleiter nicht benutzt.



Die Dreieckschaltung (Drei-Leitersystem) wird hauptsächlich in der Industrie bei leistungsstarken Maschinen und zur Leitung von elektrischer Energie über große Entfernungen eingesetzt.